Codes sur des éclatées du plan projectif

I / Eclatements

II / Systèmes linéaires

III / Codes de J. Davis

IV / Autres codes

I| Eclater $\mathbb{A}^2$ en O

$Bl_O(\mathbb{A}^2)$ est la sous variété de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ définie par

$$\left\{ (x, y, [s:t]) \,/\, sy = tx \right\}$$

Rq : si $(x,y) \neq (0,0) \rightsquigarrow$ 1 seul pt $(x, y, [x:y])$

si $(x,y) = (0,0) \rightsquigarrow \{(0,0,[s:t])\} = \mathbb{P}^1$

Cartes :

① $\{s \neq 0\}$

$\{t \neq 0\}$

$$U_x = Bl(\mathbb{A}^2) \cap \left(\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1_{\substack{s \neq 0 \\ t \neq 0}}\right)$$

$$= \left\{ \left(x, y, \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right),\ \begin{matrix} y = xu \\ x = yv \end{matrix} \right\}$$

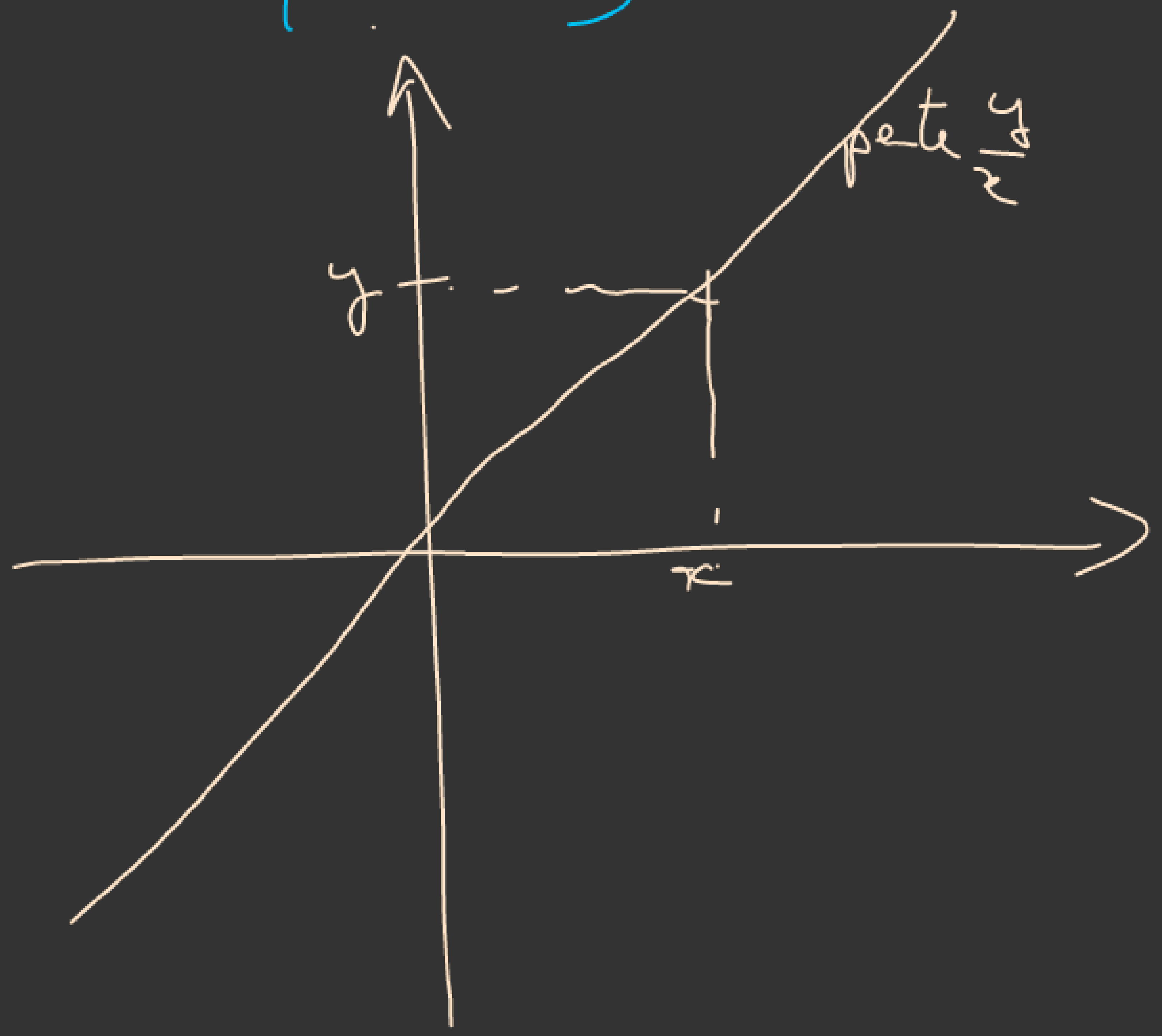
$$= \left\{ \left(x, y, \frac{y}{x}\right) \right\} \qquad \frac{x}{y}$$

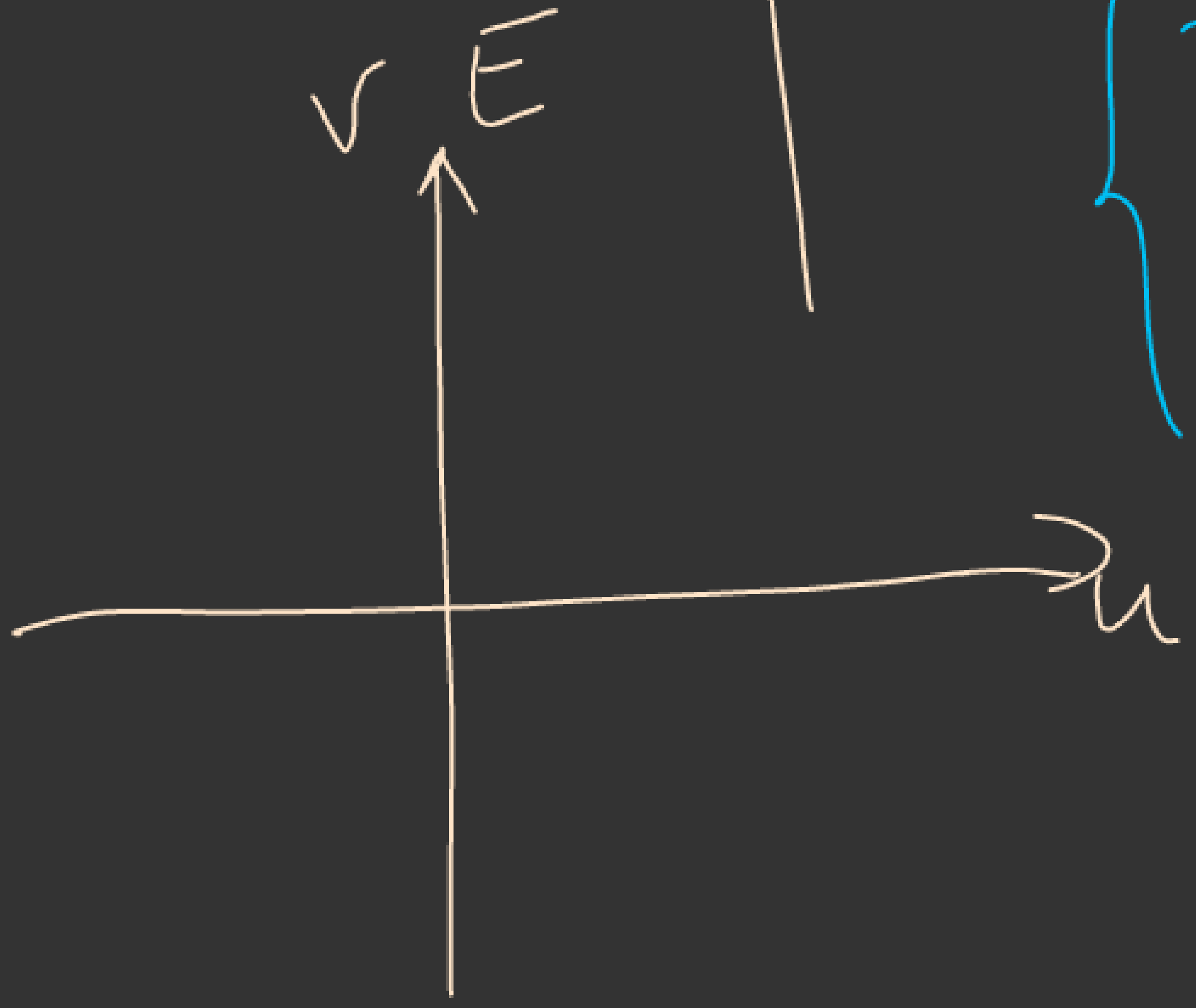
$$(u, uv, v)$$

$$(uv, u, v)$$

$$\uparrow$$

$$(u, v)$$





chgt de variables

$$\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u \end{cases}$$

Soit C courbe de $\mathbb{A}^2$ passant par O, d'équation $f=0$.

$$f(x,y) = \sum_{i \geq m} f_i(x,y) \qquad f_i \text{ hom de } d^\circ\, i.$$

$$(x,y,[s:t]) \overset{\pi}{\mapsto} (x,y)$$

où $m \geq 1$ est la multiplicité de f en O.

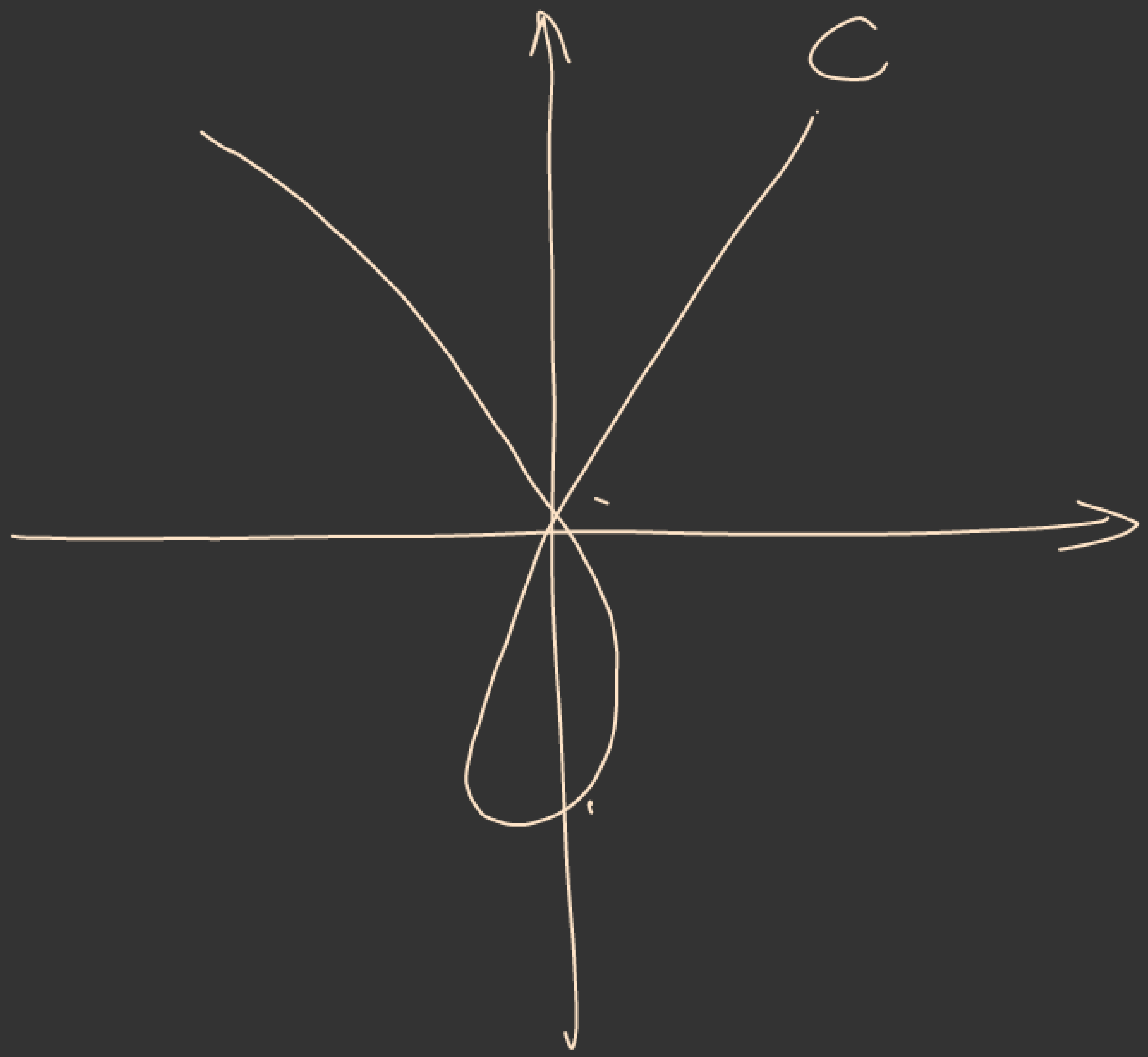
Si $\pi : Bl_O(\mathbb{A}^2) \longrightarrow \mathbb{A}^2$ est l'éclatement, $\pi^* C$ est donnée par des équations

$$f(uv,u) = \sum_{i \geq m} f_i(uv,u)$$
$$= \sum_{i \geq m} u^i f_i(v,1)$$
$$= \underbrace{u^m}_{mE} \underbrace{\sum_{i \geq m} u^{i-m} f_i(v,1)}_{\tilde{C}}$$

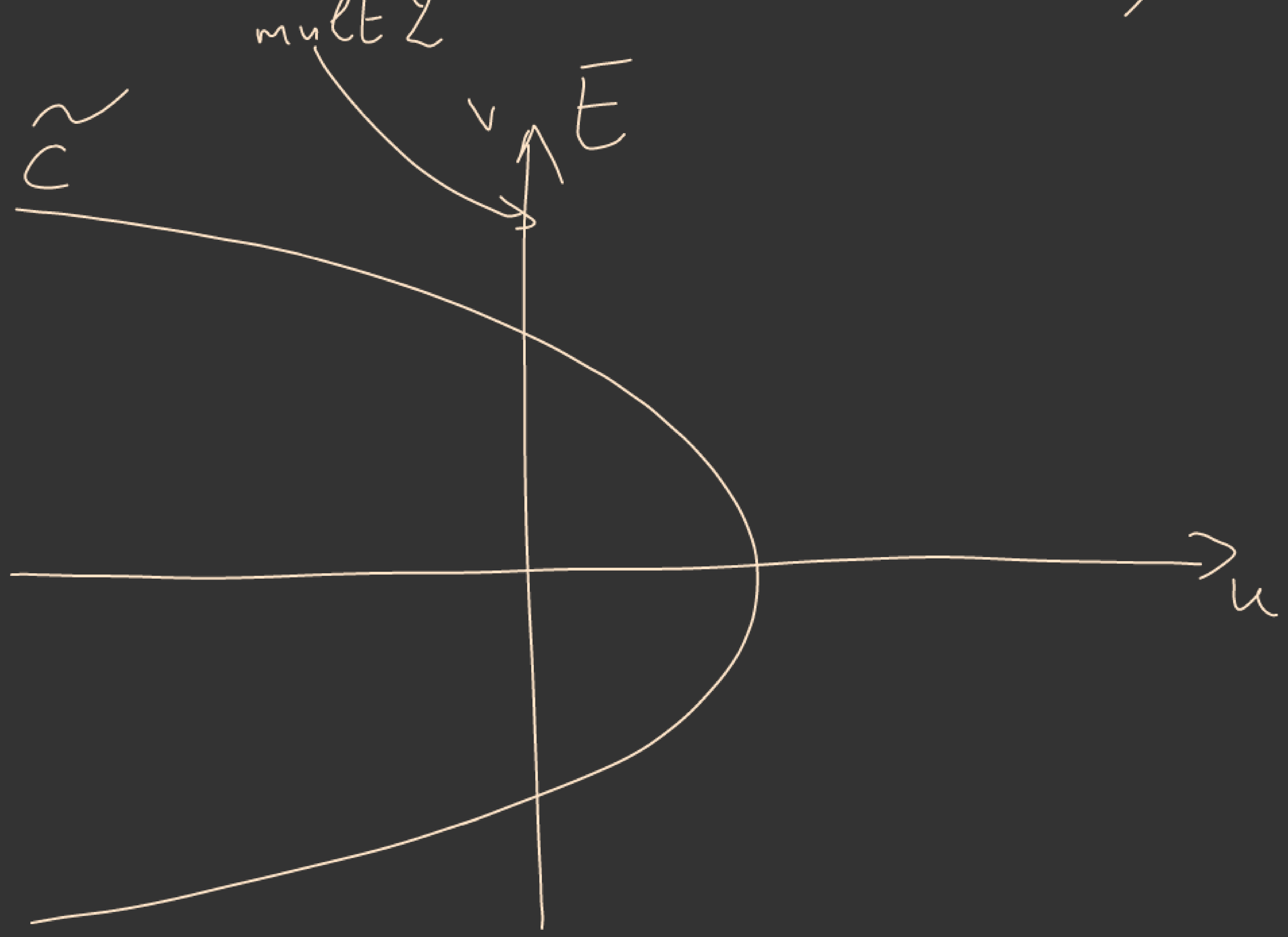
Déf : $\pi^* C$ est la <u>transformée totale</u> de C.

$\tilde{C}$ est la <u>transformée stricte</u> de C

Ex: $f = y^3 - y^2 + x^2$



$$f(uv, u) = u^3 - u^2 + u^2 v^2$$
$$= u^2 (u - 1 + v^2)$$



Produit d'intersection (sur l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en p)

On a : si D & D' sont des diviseurs sur $\mathbb{P}^2$

$\longrightarrow \pi^*D \cdot \pi^*D' = D \cdot D'$

$\longrightarrow \pi^*D \cdot E = 0$

$\longrightarrow E^2 = -1$

<u>dém</u> : soit C lisse en p.

$$\pi^*C = \tilde{C} + E$$

$$\underbrace{\pi^*C \cdot E}_{0} = \underbrace{\tilde{C} \cdot E}_{1} + E^2$$

Groupe de Picard (ou de Néron Severi)

En général, $\pi^* \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} E$ $(\dim X = 2)$

Ici $\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_0(\mathbb{P}^2)) = \mathbb{Z}\pi^* L \oplus \mathbb{Z} E$ — L classe d'une droite ds $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$

$K_{Bl} = \pi^* K_{\mathbb{P}^2} + nE \quad n \in \mathbb{Z}$

Adjonction avec le div exceptionnel

$(K+E)\cdot E = 2g(E) - 2 = -2$

$(\pi^* K_{\mathbb{P}^2} + nE + E)\cdot E = -2 \implies n = 1$

On éclate $\mathbb{P}^2$ en r points $p_1, \dots, p_r$

On a une surface X

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} E_0 \oplus \mathbb{Z} E_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} E_r \quad (E_0 = \pi^* L)$$

$$E_0^2 = -E_i^2 = 1 \quad i \geq 1$$

$$E_i \cdot E_j = 0$$

On a

$$K = -3E_0 + E_1 + \cdots + E_r$$

II / Systèmes linéaires complets sur X

$\pi : X \to \mathbb{P}^2$

Rappel : si C div de $\mathbb{P}^2$, $\pi^* C = \tilde{C} + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{mult}_{p_i}(C)\, E_i$

Un diviseur effectif sur X s'écrit de façon unique

$$\tilde{C} + \sum_{i=1}^{r} a_i E_i \quad \begin{cases} \tilde{C} \text{ transfo stricte d'une courbe de } \mathbb{P}^2 \\ a_i \geq 0 \end{cases}$$

On pose $D = d_0 E_0 - d_1 E_1 - \dots - d_r E_r \in \mathrm{Pic}(X)$ $\quad d_i \in \mathbb{N}$

<u>Pb</u> : décrire $H^0(X, \mathcal{L}(D))$?

$$\tilde{C} + \sum_{i=1}^{r} a_i E_i = \pi^* C - \sum (\mathrm{mult}_{p_i}(C) - a_i) E_i$$

$$\sim d E_0 - \quad ''$$

$d = \deg C$

est lin^t équivalent à D ssi $\begin{cases} d = d_0 \\ \mathrm{mult}_{p_i}(C) - a_i = d_i \end{cases}$

On veut les a_i positifs.

Les div effectifs lin^t équivalents à D proviennent des courbes de $\mathbb{P}^2$

$\longrightarrow$ de degré d_0

$\longrightarrow$ de mult $\geq d_i$ en p_i

Riemann-Roch (sur X)

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q + p_g = h^{00} - h^{01} + h^{02}$$

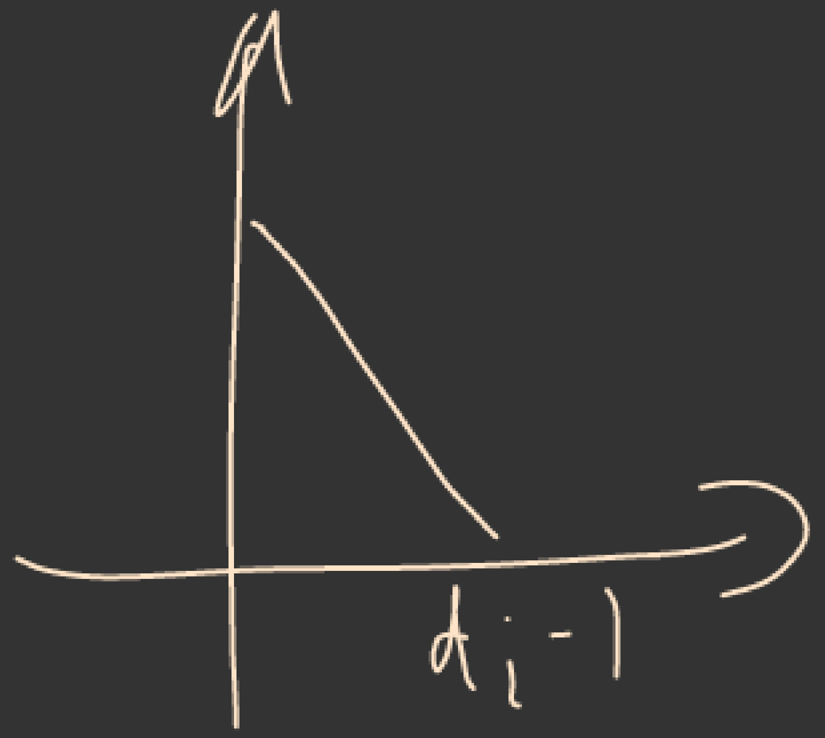
$$\chi(D) = \frac{1}{2}(D-K)\cdot D + 1 \leftarrow (\text{birationnelle à } \mathbb{P}^2)$$

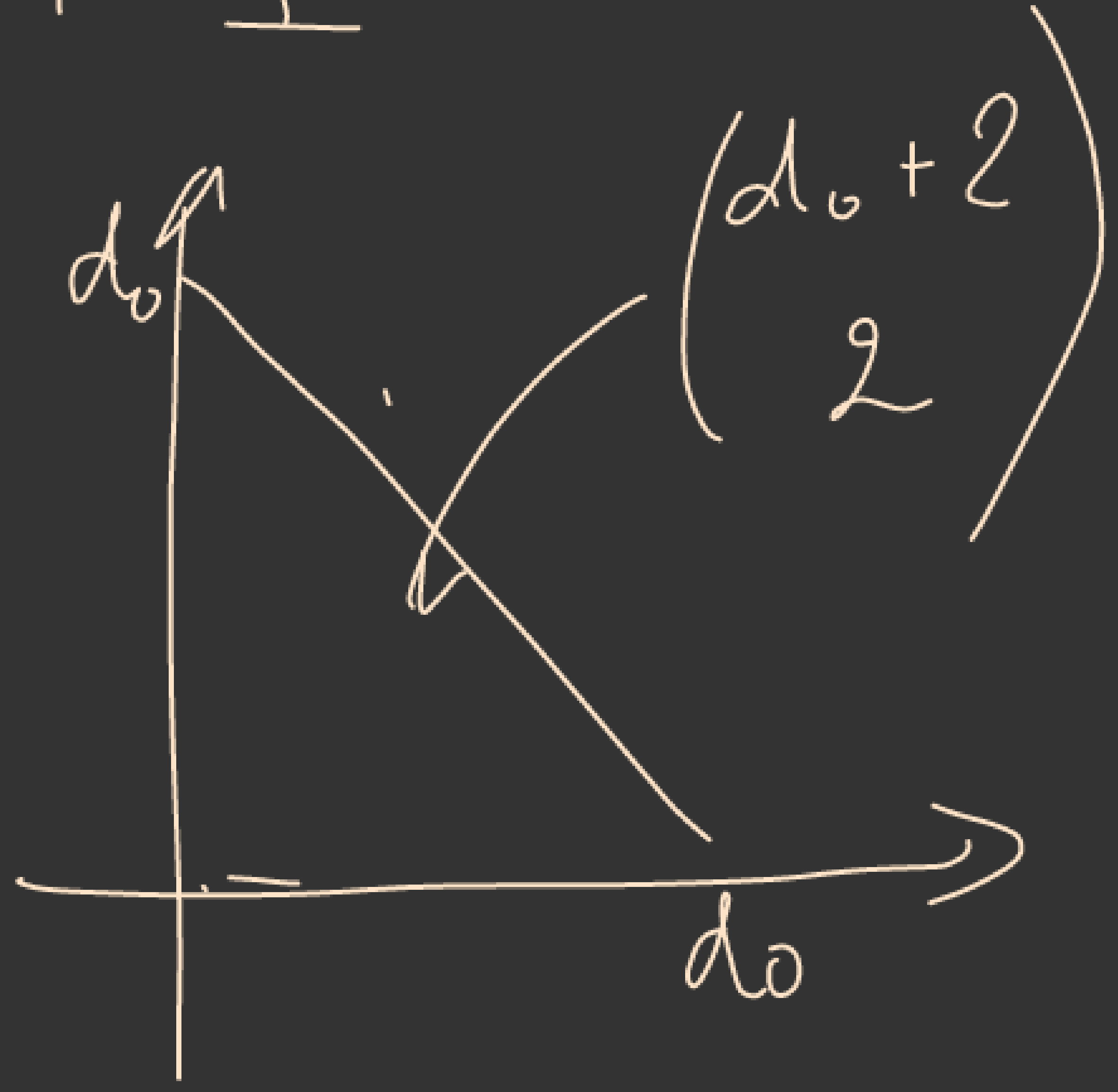
$$\chi(D) = h^0(D) - h^1(D) + h^2(D)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((d_0+3)E_0 - \sum (d_i+1)E_i\Big)\Big(d_0E_0 - \sum d_iE_i\Big) + 1$$

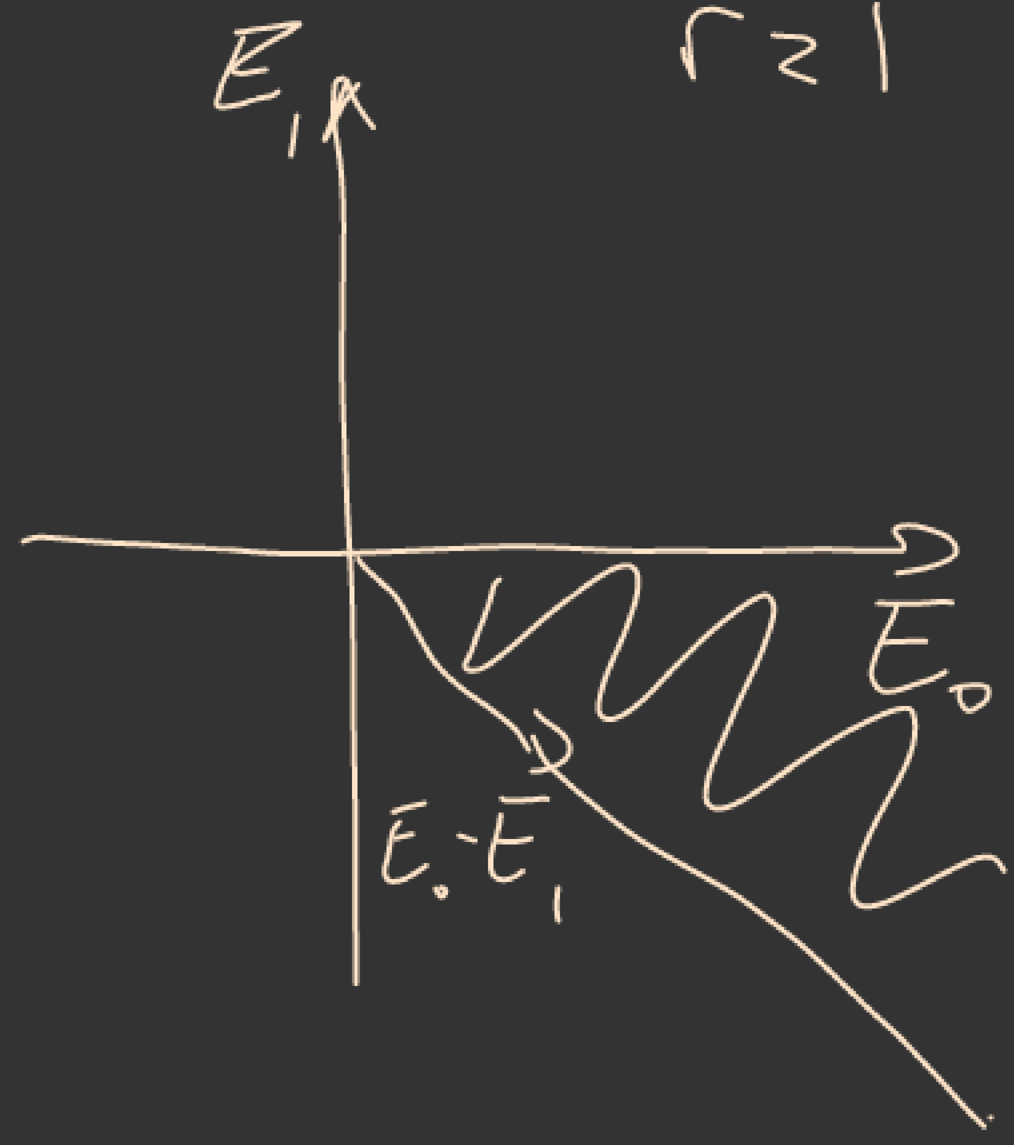
$$= \frac{1}{2}\Big(d_0(d_0+3) - \sum d_i(d_i+1)\Big) + 1$$

$$= \binom{d_0+2}{2} - \sum_{i=1}^{r} \binom{d_i+1}{2}$$





Lemme : si $D \cdot E_0 \geq -2$, $H^2(X, \mathcal{L}(D)) = \{0\}$



Supposons $P_1, \dots, P_r$ alignés (sur $\Delta \subset \mathbb{P}^2$)

Prop^n : On a équivalence entre

(i) D nef

(ii) $D \cdot E_i \geq 0$ et $D \cdot \tilde{\Delta} \geq 0$

(iii) D est combinaison entière positive des E_0, $E_0 - E_i$, $1 \leq i \leq r$

démo : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\tilde{\Delta} = E_0 - \sum_{i=1}^{r} E_i$ + Calcul

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) car un div effectif dont le syst. lin n'a pas de composante fixe est nef $\square$

Cor : si D ef, alors $H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \{0\}$

démo : si $D = 0$ c'est clair

sinon on écrit $D = D' + F$ avec $F = E_0$ ou $E_0 - E_i$

Je choisis C section irréd de F

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-F) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

$$\otimes \mathcal{L}(D) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{L}(D-F) \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}(D-F)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}(D)) \longrightarrow \underbrace{H^1(C, \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C)}_{\text{nul}}$$

Or a $C \simeq \mathbb{P}^1$, et $\deg_C(\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C) = D \cdot F\big|_C \geq 0$ donc nul

Réc sur d_0 où $D = d_0 E_0 + \cdots$

Déf : Une surface X est anticanonique / del Pezzo quand le diviseur $-K_X$ est effectif / ample.

Rq : $-K_X = 3E_0 - E_1 - \dots - E_r$

Ie : il existe une cubique passant par $p_1, \dots, p_r$

$-K_X$ effectif ssi

III / Codes de Davis

$n = (q-1)^2 \qquad k = \mathbb{F}_q$

$$\mathcal{C}_L\left(X,\ \mathcal{P} = k^{*2},\ d_0 E_0 - E_1 - \cdots - E_r\right)$$

$\mathbb{P}^2$