Variétés de Deligne-Lusztig : définitions

$k = \overline{\mathbb{F}_q}$

① Groupes algébriques

- Variété $/k$ + loi de groupe (Szamuely)

  $m : G \times G \longrightarrow G$ morph de k-var

  + axiomes de groupe

Exemples $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}^1$

$(x,y) \longmapsto x+y$

$$\mathbb{G}_m = V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2$$

$$\operatorname{Spm} k[T,T^{-1}]$$

$\mu_n \subseteq \mathbb{G}_m$ $\quad V(x^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$

$n \wedge p = 1$

$$GL_n = \{(A,x) \in \mathbb{A}^{n^2+1},\ \det A \cdot x = 1\}$$

$$SL_n = \{A,\ \det A = 1\} \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$$

(O_n, SO_n), $\quad U_n = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{T}_n = \begin{pmatrix} * \end{pmatrix}$, $\quad D_n \begin{pmatrix} * \end{pmatrix}$

Notion de ss gpe algébrique, d'homomorph. de quotient ...

<u>Théorème</u>: Tout groupe algébrique affine est isomorphe à un sous-groupe de $GL_{\underline{n}}$.

$(\rho : G \hookrightarrow GL(A(G)))$

(Chevalley) H sous groupe de G
$\exists$ V e.v.d.f. et $G \hookrightarrow GL(V)$
tq H stabilise une droite..

- Si $H \triangleleft G$, $\exists W$ e.v.d.f

$H = \ker(G \longrightarrow GL(W))$

<u>$G \subseteq GL_n$</u>

$g \in G$ est dit <u>unipotent</u> si $g - \mathrm{Id}$ est nilpotent

semi-simple s'il admet une base de vp...

<u>Jordan</u>: $g \in G$, $\exists ! (g_u$ unipotent, g_s semi-simple$)$ tq $g = g_u g_s = g_s g_u$ (poly eng)

Si $\overset{\text{Th}}{G}$ affine, $\forall g \in G$ $\exists ! (g_u, g_s) \in G$

tq $\rho_{g_s} = (\rho_g)_s$ et $\rho_{g_u} = (\rho_g)_u$

$$\left(\rho : \begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & GL(A(G)) \\ g & \longmapsto & \rho_g \end{array} \right)$$

et $\forall \phi : G \xrightarrow{\ } GL(V)$

$\phi(g_s) = (\phi(g))_s$ et $\phi(g_u) = (\phi(g))_u$

$\rightsquigarrow$ définition d'éléments unip., ss.

② Groupes unip., nilp., résolubles.

Dr au complet de V, de dim n.

$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$

$Fl(V)$ leur ensemble.

<u>Prop</u> (Kolchin) : Soit G unipotent $\subseteq GL(V)$

$\exists D \in Fl(V)$, G stabilise D.

$(\forall i \quad G(V_i) = V_i)$

<u>Corollaire</u> : Tout gpe algébrique affine unipotent est isomorphe à un sous-gpe de $\mathbb{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Corollaire</u> : unipotent $\Rightarrow$ nilpotent $\Rightarrow$ résoluble

($\mathbb{U}_n$ est nilpotent)

nilpotent : $G_0 = G$, $G_1 = [G, G]$
$G^i = [G, G^{i-1}]$
$\exists n, G^n = \{1\}$

résoluble : m̂ sauf $[G^{i-1}, G^{i-1}] = G^i$.

Théorème (Lie-Kolchin)

$G \leq GL(V)$ <u>résoluble</u> connexe

Alors $\exists D \in F\ell(V)$

$G \cdot D = D$.

(Par induction sur i, $G^i = \{1\}$)

Généralisation :

Théorème du point fixe de Borel :

G affine, résoluble, connexe agissant sur X projective.

$\Big(G \times X \longrightarrow X$ action groupe tq $\forall g$

$\varphi_g : X \xrightarrow{\sim} X$ isom de variétés.

Alors cette action admet un pt fixe.

$\big(Fl(V)$ variété projective $\big)$

$G \circlearrowright Fl(V)$ redonne Lie-Kolchin.

Espaces homogènes pour G : X q. proj et $G \circlearrowright X$ transitive

Quotient V de G par H ss-gpe fermé : (X, π), X e. h. et $\pi : G \longrightarrow X$ tq les fibres sont réunions de classes à gauche pour H, + propriété universelle.

Théorème : G affine connexe et H fermé, (X, π) existe.

(utilise Chevalley)

Si $H \triangleleft G$, $\pi : G \to G/H$

morphisme de gpes algébriques de noyau H.

(utilise $\rho : G \to GL(W)$ de noyau H, $(G/H = \mathrm{Im}(\rho), \rho)$)

3) Borel

G gpe alg. affine connexe

Déf : ss gpe fermé résoluble maximal de G.

Théorème :

ds GL_n, $B = g T_n g^{-1}$

SL_n, $B = g (T_n \cap SL_n) g^{-1}$

Deux Borel quelconques sont conjugués.

"Demonstration" :

Lemme : $H \subseteq G$ fermé tq G/H projective et B Borel.

Alors H contient un conj. de B.

(Pt fixe de Borel appliqué à $G \circlearrowleft G/H$.)

$BgH = gH$

Fait : une orbite de dim minimal est fermée.

$G \to GL(V)$ et on fait $G \circlearrowright \mathbb{P}(V)$

$\exists$ une orbite de dim minimale. $H = \mathrm{Stab}\, D \in F$

G/H est projective donc (lemme)

H contient un conjugué gBg^{-1} de B.

connexe et on a $gBg^{-1} \subseteq H^{\circ}$ ← résoluble car stab un drapeau complet

par maximalité

donc $gBg^{-1} = H^{\circ}$.

$R(G) = \left(\bigcap B\right)^{\circ}$ = le + gd ss gpe connexe resoluble et normal de G.

(radikal)

$R_u(G)$ — unipotent

G semi-simple si $R(G) = \{1\}$

G réductif si $R(G)$ tore

$(R_u(G) = \{1\})$

SL_n semi-simple

GL_n réductif

$R(GL_n) = Z(GL_n) \simeq \mathbb{G}_m$

λI_n

4) Tores maximaux.

Tore = produit de $\mathbb{G}_m$

Tore maximaux = tore de dim maximale

Ex de Gl_n, $T = g^{-1} D_n g$

dim n

Sl_n $T = g D_n \cap Sl_n g^{-1}$

dim $n-1$.

Théorème. G connexe affine résoluble

$\exists T$ tore max, $T \simeq G/G_u$

$G = G_u \rtimes T$ $\quad$ unipotents de G

Th : 2 tores max sont conjugués.

Groupe de Weyl $W(G,T) = N_G(T)/Z_G(T)$ $\quad$ $\simeq \mathfrak{S}_n$

G réductif $Z_G(T) = T$ $\quad$ $\subseteq \cap B$

par maximal

C'est un gpe fini.

(5) Variétés de D-L.

<u>G réductif affine connexe</u> / $k = \overline{\mathbb{F}_p}$

<u>$\mathbb{F}$-structure</u>

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & G \arrow[d, hook] \\ GL_n \arrow[r, "F"] & GL_n \end{tikzcd}$$

$\exists \delta$ tq F^δ est un Frobenius standard

$$[a_{ij}] \longmapsto [a_{ij}^{p^e}]$$

<u>Th</u> (Lang-Steinberg)

$$\left| \begin{array}{l} L : G \longrightarrow G \\ g \mapsto g^{-1} F(g) \end{array} \right. \quad \text{morph de var } \underline{\text{surjectif}}$$

<u>Corollaire</u> : G admet un Borel F-stable.

($\overset{\text{can}}{F}(B)$ et B sont conjugués)

$$X = G/B = \{B, B \text{ Borel}\}$$

$$X = \bigsqcup_{W} \underbrace{BwB/B}_{\text{ss var fermée de } X \text{ dim } \ell(w)}$$

$$G \circlearrowright X \times X$$

$\ell(w)$ + petit entier n tq $w = s_1 \cdots s_n$ involutions

$$\mathcal{O}(w) := G \cdot (B, wB)$$

$$\mathcal{O}(w) = \{(g_1 B, g_2 B),\ g_1^{-1} g_2 \in BwB\}$$

$$X \times X = \bigsqcup_{w \in W} \mathcal{O}(w)$$

- compact° lisse de $X(w)$

Définition Soit $w \in W$. La var de D-L $X(w)$ est le ss schéma loc fermé de X des ss gpes de Borel tq $(B, FB) \in \mathcal{O}(w)$

$= \mathcal{O}(w) \cap \Gamma_F$

$= \{x \in G,\ x^{-1} F(x) \in BwB\}/B$

$\longrightarrow$ non sing, dim pure $\ell(w)$

<u>Th</u> : <u>G affine connexe.</u>

- $G = \bigcup_{B \text{ Borel}} B$

  $(\rightsquigarrow B \triangleleft G ; B = G)$

- $N_G(B) = B$
- B parabolique : G/B projective.

<u>Corollaire</u> :

$$G/B \longrightarrow \{B, B \text{ Borel}\}$$
$$g \longmapsto g^{-1} B g$$

est une bijection.

<u>Th</u> (Décomposition de Bruhat)

$$G = \bigsqcup_{w \in W(G,T)} B \dot{w}^{\in N_G(T)} B$$

GL_n, $T = D_n$, $B = \mathbb{T}_n$

$W = \mathfrak{S}_n$. mat de perm

$\forall A \in GL_n \quad \exists U_1, U_2 \in T_n$
$\exists! P \in W, \quad A = U_1 P U_2$.