Distance minimale des codes sur les surfaces et construction de bonnes familles

Jade Nardi

Jeudi 10 novembre 2016

On se donne

- Une variété projective lisse X définie sur $\mathbb{F}_q$,
- Un ensemble de n points $\mathbb{F}_q$-rationnels $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset X(\mathbb{F}_q)$,
- Un diviseur G de X.

On se donne

- Une variété projective lisse X définie sur $\mathbb{F}_q$,
- Un ensemble de n points $\mathbb{F}_q$-rationnels $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset X(\mathbb{F}_q)$,
- Un diviseur G de X.

Le code linéaire $C(\mathcal{P}, G)$ est l'image de l'application

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} L(G) & \to & \mathbb{F}_q^n \\ f & \mapsto & (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \end{array} \right.$$

où $L(G) = \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid (f) + G \geq 0\}$.

On se donne

- Une variété projective lisse X définie sur $\mathbb{F}_q$,
- Un ensemble de n points $\mathbb{F}_q$-rationnels $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset X(\mathbb{F}_q)$,
- Un diviseur G de X.

Le code linéaire $C(\mathcal{P}, G)$ est l'image de l'application

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} L(G) & \to & \mathbb{F}_q^n \\ f & \mapsto & (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \end{array} \right.$$

où $L(G) = \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid (f) + G \geq 0\}$.

Si X est une courbe, $G - P_{i_1} - \cdots - P_{i_m} \in \operatorname{Div} X$.
Le théorème de Riemann-Roch donne une minoration de la distance minimale en la reliant avec au plus grand entier m tel qu'il existe un m-uplet $(i_1, \ldots, i_m)$ qui vérifie $L(G - P_{i_1} - \cdots - P_{i_m}) \neq \{0\}$.

Définition

Une *bonne famille de codes* sur $\mathbb{F}_q$ est une suite de codes (C_i) de paramètres $[n_i, k_i, d_i]$ telle que $\lim n_i = +\infty$, $\limsup \frac{d_i}{n_i} > 0$ et $\limsup \frac{k_i}{n_i} > 0$.

Un idée pour avoir $\lim n_i = +\infty$: considérer des variétés de plus grande dimension

Définition

Une *bonne famille de codes* sur $\mathbb{F}_q$ est une suite de codes (C_i) de paramètres $[n_i, k_i, d_i]$ telle que $\lim n_i = +\infty$, $\limsup \frac{d_i}{n_i} > 0$ et $\limsup \frac{k_i}{n_i} > 0$.

Un idée pour avoir $\lim n_i = +\infty$: considérer des variétés de plus grande dimension
1e étape : codes sur les **surfaces**

Définition

Une *bonne famille de codes* sur $\mathbb{F}_q$ est une suite de codes (C_i) de paramètres $[n_i, k_i, d_i]$ telle que $\lim n_i = +\infty$, $\limsup \frac{d_i}{n_i} > 0$ et $\limsup \frac{k_i}{n_i} > 0$.

Un idée pour avoir $\lim n_i = +\infty$: considérer des variétés de plus grande dimension
1e étape : codes sur les **surfaces**
MAIS ~~Riemann-Roch pour la distance minimale~~

Idées :

- Éclater la surface en les points P_i pour en faire des diviseurs.
- Considérer des courbes $C_1, \ldots, C_m$ sur X telles que $\mathcal{P} = \bigcup C_j(\mathbb{F}_q)$

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de la surface X en les points $P_1, \ldots, P_n$. On note $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ le diviseur exceptionnel associé à P_i.
Alors $\tilde{X} \smallsetminus \{E_1, \ldots, E_n\} \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de la surface X en les points $P_1, \ldots, P_n$. On note $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ le diviseur exceptionnel associé à P_i.
Alors $\tilde{X} \setminus \{E_1, \ldots, E_n\} \xrightarrow{\sim} X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Définition

Un diviseur D de X est dit *nef* si pour toute courbe C irréductible de X, $C.D \geq 0$.
Un diviseur H de X est dit *ample* si $H^2 > 0$ et pour toute courbe C irréductible de X, $C.H > 0$.

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de la surface X en les points $P_1, \ldots, P_n$. On note $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ le diviseur exceptionnel associé à P_i.
Alors $\tilde{X} \setminus \{E_1, \ldots, E_n\} \xrightarrow{\sim} X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Définition

Un diviseur D de X est dit *nef* si pour toute courbe C irréductible de X, $C.D \geq 0$.
Un diviseur H de X est dit *ample* si $H^2 > 0$ et pour toute courbe C irréductible de X, $C.H > 0$.

Remarque : Ample $\Rightarrow$ nef

Définition (Constante de Seshadri)

Soit X une surface projective, $\mathcal{P} = \{P_1 \ldots, P_n\} \subset X(\mathbb{F}_q)$, $D = P_1 + \ldots, P_n$ et G un diviseur de X. On définit la *constante de Seshadri* de G en D par

$$\varepsilon(G, D) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q} \mid \pi^* G - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est nef}\}$$

Proposition [Hansen]

1. *Supposons* G *ample de constante de Seshadri* $\varepsilon(G, D) \geq \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \in \mathbb{N}$*. Alors la distance minimale du code* $C(\mathcal{P}, G)$ *vérifie*

$$d \geq n - \frac{G^2}{\varepsilon}$$

2. *Supposons qu'il existe* $\zeta \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{L}(G)^{\otimes \zeta} \otimes \mathcal{I}$ *est engendré par ses sections globales. Alors la distance minimale du code* $C(\mathcal{P}, G)$ *vérifie*

$$d \geq n - \zeta G^2$$

où $\mathcal{I}$ *est le faisceau d'idéaux associé aux points* P_i*.*

Remarque : Si G est très ample, $\zeta = q + 1$ convient.

Supposons de plus que

1. G est un diviseur effectif,
2. $\{P_i\} \cap \operatorname{Supp} G = \varnothing$,
3. L'application ev est injective (i.e. $f(P_i) = 0$ pour tout $i \Rightarrow f \equiv 0$),
4. On a un diviseur ample H de X tel que $G.H > K.H$

Proposition

La dimension du code $C(\mathcal{P}, G)$ vérifie

$$k \geq \frac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1$$

Supposons de plus que

1. G est un diviseur effectif,
2. $\{P_i\} \cap \operatorname{Supp} G = \varnothing$,
3. L'application ev est injective (i.e. $f(P_i) = 0$ pour tout $i \Rightarrow f \equiv 0$),
4. On a un diviseur ample H de X tel que $G.H > K.H$

Proposition

La dimension du code $C(\mathcal{P}, G)$ vérifie

$$k \geq \frac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1$$

Preuve: On applique le théorème de Riemann-Roch

$$k = h^0(X, \mathcal{L}(G)) = \frac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1 + h^1(X, \mathcal{L}(G)) - h^0(X, \mathcal{L}(K-G))$$

par dualité de Serre. Or $G.H > K.H \Rightarrow (K-G).H < 0$. Mais H est ample, donc nef et intersecte tout diviseur effectif positivement. Donc $K - G$ n'est pas effectif et $h^0(X, \mathcal{L}(K-G)) = 0$. □

Pour **calculer une borne inférieure de la distance minimale**, on peut considérer pour tout sous-ensemble de points $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble

$$L(\delta) = L(G) \cap \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid \forall\, j \in \{i_1, \dots, i_m\},\ f(P_j) = 0\}$$

Pour **calculer une borne inférieure de la distance minimale**, on peut considérer pour tout sous-ensemble de points $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble

$$L(\delta) = L(G) \cap \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid \forall\, j \in \{i_1, \dots, i_m\},\ f(P_j) = 0\}$$

Attention : $G - P_{i_1} - P_{i_2} - \dots - P_{i_m} \notin \operatorname{Div} X$.

Pour **calculer une borne inférieure de la distance minimale**, on peut considérer pour tout sous-ensemble de points $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble

$$L(\delta) = L(G) \cap \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid \forall\, j \in \{i_1, \dots, i_m\},\ f(P_j) = 0\}$$

Attention : $G - P_{i_1} - P_{i_2} - \cdots - P_{i_m} \notin \operatorname{Div} X$.
On note $p : X' \to X$ l'éclatement de X les points $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ et les diviseurs exceptionnels $E_{i_1}, \dots, E_{i_m}$ sur X'. On pose $L(\delta') = L(p^*G - E_{i_1} - E_{i_2} - \cdots - E_{i_m})$.

Pour **calculer une borne inférieure de la distance minimale**, on peut considérer pour tout sous-ensemble de points $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble

$$L(\delta) = L(G) \cap \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid \forall\, j \in \{i_1, \dots, i_m\},\ f(P_j) = 0\}$$

Attention : $G - P_{i_1} - P_{i_2} - \cdots - P_{i_m} \notin \operatorname{Div} X$.
On note $p : X' \to X$ l'éclatement de X les points $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ et les diviseurs exceptionnels $E_{i_1}, \dots, E_{i_m}$ sur X'. On pose $L(\delta') = L(p^* G - E_{i_1} - E_{i_2} - \cdots - E_{i_m})$.
On a une application naturelle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L(\delta) & \to & L(\delta') \\ f & \mapsto & p^* f = f \circ p \end{array} \right.$$

Théorème [Bouganis]

1. *Il y a une bijection entre* $L(\delta)$ *et* $L(\delta')$.
2. *En notant* $l(\delta)$ *(resp.* $l(\delta')$*) la dimension de* $L(\delta)$ *(resp.* $L(\delta')$*) et* $h^1(\delta') = \dim H^1(X', p^*G - E_{i_1} - E_{i_2} - \cdots - E_{i_m})$, *on a*

$$l(\delta') \leq \frac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha(X) + 1 - (m - h^1(\delta'))$$

et donc $l(\delta') \leq l(\delta) - (m - h^1(\delta'))$.

$h^1(\delta')$ mesure la position relative des points P_i.

Soit X une surface projective lisse, $C_1, \dots, C_m$ des courbes irréductibles sur X telles que $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^m C_i(\mathbb{F}_q)$ et $G \in \mathrm{Div}\, X$.

Soit X une surface projective lisse, $C_1, \ldots, C_m$ des courbes irréductibles sur X telles que $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{m} C_i(\mathbb{F}_q)$ et $G \in \operatorname{Div} X$.

Proposition [Hansen]

Supposons que $\#C_i(F_q) \leq N$ *et* $G.C_i \geq 0$.
On pose $l = \sup_{s \in L(G)} \#\{i \mid C_i \subseteq (s) + (G)\}$.

Alors la distance minimale du code $C(\mathcal{P}, G)$ *vérifie* $d \geq n - lN - \sum_{i=1}^{m} G.C_i$.

Si de plus, H *est un diviseur nef de* X *tel que* $H.C_i > 0$*, alors*

$$l \leq \frac{G.H}{\min_i\{C_i.H\}}$$

Soit X une surface projective lisse, $C_1, \dots, C_m$ des courbes irréductibles sur X telles que $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^m C_i(\mathbb{F}_q)$ et $G \in \operatorname{Div} X$.

Proposition [Hansen]

Supposons que $\#C_i(F_q) \leq N$ *et* $G.C_i \geq 0$.
On pose $l = \sup_{s \in L(G)} \#\{i \mid C_i \subseteq (s) + (G)\}$.

Alors la distance minimale du code $C(\mathcal{P}, G)$ *vérifie* $d \geq n - lN - \sum_{i=1}^m G.C_i$.

Si de plus, H *est un diviseur nef de* X *tel que* $H.C_i > 0$*, alors*

$$l \leq \frac{G.H}{\min_i\{C_i.H\}}$$

Exemple : On prend $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ donc $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. On prend $G = (d_1, d_2)$, $H = (0, 1)$ et on recouvre X par $q + 1$ lignes L_i de type $(1, 0)$. Donc $\mathcal{P} = X(\mathbb{F}_q)$.

$$C_i.H = 1,\ G.C_i = d_2,\ l = d_1$$

On a donc les paramètres

$$n = (q+1)^2,\ k = (d_1+1)(d_2+1) \text{ et } d \geq n - (d_1+d_2)(q+1) + d_1 d_2$$

Proposition [Bouganis]

Supposons que

1. G *est effectif,*
2. H *est un diviseur nef,*
3. $C_i.H \geq \alpha > 0$,
4. $\#C_i(F_q) \geq M > 0$,
5. $G.C_i \leq \beta \leq M$,
6. $G.H > K.H$.

Pour toute section $s \in L(G)$ *non nulle, on pose* $D^s = \#\{i \,|\, C_i \notin (s)_0\}$. *Alors*

$$D^s \geq m - \frac{G.H}{\alpha}$$

Alors la distance minimale du code $C(\mathcal{P}, G)$ *vérifie* $d \geq \left(m - \frac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$.

Proposition [Bouganis]

Supposons que

1. G *est effectif,*
2. H *est un diviseur nef,*
3. $C_i.H \geq \alpha > 0$,
4. $\#C_i(F_q) \geq M > 0$,
5. $G.C_i \leq \beta \leq M$,
6. $G.H > K.H$.

Pour toute section $s \in L(G)$ *non nulle, on pose* $D^s = \#\{i \,|\, C_i \notin (s)_0\}$. *Alors*

$$D^s \geq m - \frac{G.H}{\alpha}$$

Alors la distance minimale du code $C(\mathcal{P}, G)$ *vérifie* $d \geq \left(m - \frac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$.

Exemple : Soit $X = \mathbb{P}^2$, que l'on recouvre de $m = q + 1$ lignes $L_1, \ldots, L_m$ et $G = L$. On a $K = -3L$, $p_\alpha(\mathbb{P}^2) = 0$ et $H^1(\mathbb{P}^2, L) = \{0\}$. Donc $n = (q+1)^2$,

$$k = \frac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1 + h^1(G) = \frac{1}{2}(1+3) + 1 = 2$$

De plus, $\alpha = \beta = 1$, $M = q + 1$ donc $d \geq (q + 1 - 1)(q + 1 - 1) = q^2$.

	Hansen	Bouganis
Hypothèses communes	X surface projective lisse $C_1, \dots, C_m$ courbes irréductibles telles que $\mathcal{P} = \bigcup C_i(\mathbb{F}_q)$ $H \in \operatorname{Div} X$ nef tel que $\min_i H.C_i = \alpha > 0$	
Hypothèses différentes	$G \in \operatorname{Div}(X)$ $\#C_i(\mathbb{F}_q) \leq N$ $G.C_i \geq 0$	$G \in \operatorname{Div} X$ *effectif* $\#C_i(\mathbb{F}_q) \geq M > 0$ $G.C_i \leq \beta < M$
Outils	$l^s = \#\{i \mid C_i \subseteq (s) + (G)\}$	$D^s = \#\{i \mid C_i \not\subseteq (s)_0\}$
Résultats	$d \geq n - \frac{G.H}{\alpha} N - \sum_{i=1}^m G.C_i$	$d \geq \left(m - \frac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$

	Hansen	Bouganis
Hypothèses communes	X surface projective lisse $C_1, \dots, C_m$ courbes irréductibles telles que $\mathcal{P} = \bigcup C_i(\mathbb{F}_q)$ $H \in \mathrm{Div}\, X$ nef tel que $\min_i H.C_i = \alpha > 0$	
Hypothèses différentes	$G \in \mathrm{Div}(X)$ $\#C_i(\mathbb{F}_q) \leq N$ $G.C_i \geq 0$	$G \in \mathrm{Div}\, X$ *effectif* $\#C_i(\mathbb{F}_q) \geq M > 0$ $G.C_i \leq \beta < M$
Outils	$l^s = \#\{i \mid C_i \subseteq (s) + (G)\}$	$D^s = \#\{i \mid C_i \not\subseteq (s)_0\}$
Résultats	$d \geq n - \frac{G.H}{\alpha} N - \sum_{i=1}^m G.C_i$	$d \geq \left(m - \frac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$

Remarque : Hansen ne suppose pas G effectif mais suppose qu'il existe au moins une section globale non nulle $s \in L(G) \neq \{0\}$. Donc $G + (s) \sim G$ et $G + (s)$ est effectif. Puisque $L(G) \cong L(G + (s))$, on peut supposer G effectif.

	Hansen	Bouganis
Hypothèses communes	X surface projective lisse $C_1, \dots, C_m$ courbes irréductibles telles que $\mathcal{P} = \bigcup C_i(\mathbb{F}_q)$ $H \in \operatorname{Div} X$ nef tel que $\min_i H.C_i = \alpha > 0$ $G \in \operatorname{Div} X$ *effectif*	
Hypothèses différentes	$\#C_i(\mathbb{F}_q) \leq N$ $G.C_i \geq 0$	$\#C_i(\mathbb{F}_q) \geq M > 0$ $G.C_i \leq \beta < M$
Outils	$l^s = \#\{i \mid C_i \subseteq (s)_0\}$	$D^s = \#\{i \mid C_i \notin (s)_0\}$
Résultats	$d \geq n - \frac{G.H}{\alpha} N - \sum_{i=1}^m G.C_i$	$d \geq \left(m - \frac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$

Si G est effectif et $s \in L(G)$, alors s s'annule sur toute une courbe irréductible C si $C \subset (s)_0 \subset G + (s)$. Donc

$$l^s + D^s = m \Rightarrow \sup_{s \in L(G)} l^s + \inf_{s \in L(G)} D^s \geq m$$

$$\min H.C_i = \alpha > 0 \Rightarrow \qquad l := \sup_{s \in L(G)} l^s \leq \frac{G.H}{\alpha}$$

	Hansen	Bouganis
Hypothèses communes	X surface projective lisse $C_1, \dots, C_m$ courbes irréductibles telles que $\mathcal{P} = \bigcup C_i(\mathbb{F}_q)$ $H \in \mathrm{Div}\, X$ nef tel que $\min_i H.C_i = \alpha > 0$ $G \in \mathrm{Div}\, X$ *effectif*	
Hypothèses différentes	$\#C_i(\mathbb{F}_q) \leq N$ $G.C_i \geq 0$	$\#C_i(\mathbb{F}_q) \geq M > 0$ $G.C_i \leq \beta < M$
Outils	$l^s = \#\{i \mid C_i \subseteq (s)_0\}$	$D^s = \#\{i \mid C_i \notin (s)_0\}$
Résultats	$d \geq n - \frac{G.H}{\alpha} N - \sum_{i=1}^m G.C_i$	$d \geq \left(m - \frac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$

Si G est effectif et $s \in L(G)$, alors s s'annule sur toute une courbe irréductible C si $C \subset (s)_0 \subset G + (s)$. Donc

$$\left.\begin{array}{ll} l^s + D^s = m \Rightarrow & \sup\limits_{s \in L(G)} l^s + \inf\limits_{s \in L(G)} D^s \geq m \\ \min H.C_i = \alpha > 0 \Rightarrow & l := \sup\limits_{s \in L(G)} l^s \leq \dfrac{G.H}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow D^s \geq m - \frac{G.H}{\alpha}$$

Lemme

Soit C une courbe irréductible sur laquelle la section $s \in L(G)$ n'est pas nulle. Alors s s'annule en au plus $G.C$ points de C.

Lemme

Soit C une courbe irréductible sur laquelle la section $s \in L(G)$ n'est pas nulle. Alors s s'annule en au plus $G.C$ points de C.

Preuve: Si s s'annule en plus de $G.C$ points de C, alors $(s)_0.C > G.C$. Mais, puisque G est effectif, $(s)_0 \leq (s) + G$ donc

$$(s)_0.C \leq ((s) + G).C = G.C$$

Lemme

Soit C une courbe irréductible sur laquelle la section $s \in L(G)$ n'est pas nulle. Alors s s'annule en au plus $G.C$ points de C.

Preuve: Si s s'annule en plus de $G.C$ points de C, alors $(s)_0.C > G.C$. Mais, puisque G est effectif, $(s)_0 \leq (s) + G$ donc

$$(s)_0.C \leq ((s) + G).C = G.C \ \lightning$$

□

Lemme

Soit C une courbe irréductible sur laquelle la section $s \in L(G)$ n'est pas nulle. Alors s s'annule en au plus $G.C$ points de C.

Preuve: Si s s'annule en plus de $G.C$ points de C, alors $(s)_0.C > G.C$. Mais, puisque G est effectif, $(s)_0 \leq (s) + G$ donc

$$(s)_0.C \leq ((s) + G).C = G.C \ \lightning$$

□

- **Point de vue de Hansen :** Il y a *au plus*

$$l^s \times \max \#C_i(F_q) + \sum_{C_i \notin (s)_0} G.C_i$$

coordonnées *nulles* dans le mot associé à la section s.

Lemme

Soit C une courbe irréductible sur laquelle la section $s \in L(G)$ n'est pas nulle. Alors s s'annule en au plus $G.C$ points de C.

Preuve: Si s s'annule en plus de $G.C$ points de C, alors $(s)_0.C > G.C$. Mais, puisque G est effectif, $(s)_0 \leq (s) + G$ donc

$$(s)_0.C \leq ((s) + G).C = G.C \ \lightning$$

□

- **Point de vue de Hansen :** Il y a *au plus*

$$l^s \times \max \#C_i(F_q) + \sum_{C_i \notin (s)_0} G.C_i$$

  coordonnées *nulles* dans le mot associé à la section s.

- **Point de vue de Bouganis :** Il y a *au moins*

$$D^s \times \left(\min\{\#C_i(F_q)\} - \max_{C_i \notin (s)_0} \underbrace{\{P \in C_i \mid s(P) = 0\}}_{\leq G.C_i} \right)$$

  coordonnées *non nulles* dans le mot associé à la section s.

Soit Γ un système linéaire de courbes sur X. On note $\Gamma - \mathcal{P}$ le sous-système linéaire maximal de Γ dont le lieu de base contient $\mathcal{P}$.

Définition

Un système linéaire est dit $\mathcal{P}$-recouvrant si

- $\Gamma - \mathcal{P} \neq \varnothing$,
- le lieu de base de $\Gamma - \mathcal{P}$ est de dimension 0.

Soit Γ un système linéaire de courbes sur X. On note $\Gamma - \mathcal{P}$ le sous-système linéaire maximal de Γ dont le lieu de base contient $\mathcal{P}$.

Définition

Un système linéaire est dit $\mathcal{P}$-recouvrant si

- $\Gamma - \mathcal{P} \neq \varnothing$,
- le lieu de base de $\Gamma - \mathcal{P}$ est de dimension 0.

Lemme

Si Γ est $\mathcal{P}$-recouvrant, alors $\Gamma^2 \geq \#\mathcal{P}$.

Soit Γ un système linéaire de courbes sur X. On note $\Gamma - \mathcal{P}$ le sous-système linéaire maximal de Γ dont le lieu de base contient $\mathcal{P}$.

Définition

Un système linéaire est dit $\mathcal{P}$-recouvrant si

- $\Gamma - \mathcal{P} \neq \varnothing$,
- le lieu de base de $\Gamma - \mathcal{P}$ est de dimension 0.

Lemme

Si Γ est $\mathcal{P}$-recouvrant, alors $\Gamma^2 \geq \#\mathcal{P}$.

Preuve: Par définition, il existe $A, B \in \Gamma$, sans composante irréductible commune. Mais $\mathcal{P}$ est contenue dans les points base de Γ donc $\mathcal{P} \subset \operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B$. Donc

$$\Gamma^2 = A.B \geq \#\mathcal{P}$$

□

Théorème [Couvreur,Lebacque,Perret]

Soit X une surface lisse géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$, avec $\mathcal{P} \subset \#X(\mathbb{F}_q)$ et $G \in \operatorname{Div} X$ tel que $\mathcal{P} \cap \operatorname{Supp} G = \varnothing$. Soit Γ un système linéaire recouvrant $\mathcal{P}$. Alors la distance minimale du code $C(\mathcal{P}, G)$ vérifie

$$d \geq n - G.\Gamma$$

Exemple : Sur $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, avec $G = (a, b)$.
Hansen $\Rightarrow d \geq n - (q+1)(a+b) + ab$
CLP $\Rightarrow d \geq n - (q+1)(a+b)$ car $(q+1)(1,1)$ recouvre les points $\mathbb{F}_q$-rationnels de X.

On se donne une suite de surfaces projectives lisses

$$\cdots \to X_i \to X_{i-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0$$

avec $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$ l'éclatement de t_i points $\mathbb{F}_q$-rationnels de X_i. On note E_i^k les diviseurs exceptionnels pour $k = 1, \ldots, t_i$.

On se donne une suite de surfaces projectives lisses

$$\cdots \to X_i \to X_{i-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0$$

avec $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$ l'éclatement de t_i points $\mathbb{F}_q$-rationnels de X_i. On note E_i^k les diviseurs exceptionnels pour $k = 1, \dots, t_i$.

Objectif : Construire sur chaque X_i un code de longueur $n_i = \#X_i(\mathbb{F}_q)$ en utilisant

Proposition [Hansen]

Soient $(C_i^j)_j$ des courbes lisses irréductibles telles que $\bigcup C_i^j(\mathbb{F}_q) = \#X_i(\mathbb{F}_q)$.
Supposons que $\#C_i(F_q) \leq N$ et $G.C_i \geq 0$. On pose $l = \sup_{s \in L(G)} \#\{i \,|\, C_i \subseteq (s) + (G)\}$.

Si H est un diviseur nef de X tel que $H.C_i > 0$, alors

$$l \leq \frac{G.H}{\min_i\{C_i.H\}}$$

et si $G.H \leq C_i.H$, alors $l = 0$ et $d \geq n - \sum_{i=1}^m G.C_i$.

On a $n_{i+1} = n_i + t_i q$ donc $\lim_{i\to+\infty} n_i = +\infty$.

Construction itérative des courbes C_i^j :
On recouvre les n_0 points $\mathbb{F}_q$-rationnels de X_0 par s_0 courbes $C_0^1, C_0^2, \ldots, C_0^{s_0}$.
On note λ_i^j le nombre de points parmi les t_i éclatés par π qui sont sur C_i^j. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s_i\}$, on pose

$$C_{i+1}^j = \pi_i^* C_i^j - \sum E_i^\beta$$

où l'on somme sur les λ_i^j diviseurs exceptionnels associés aux points éclatés sur C_i^j.

Construction itérative des courbes C_i^j :
On recouvre les n_0 points $\mathbb{F}_q$-rationnels de X_0 par s_0 courbes $C_0^1, C_0^2, \ldots, C_0^{s_0}$.
On note λ_i^j le nombre de points parmi les t_i éclatés par π qui sont sur C_i^j. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s_i\}$, on pose

$$C_{i+1}^j = \pi_i^* C_i^j - \sum E_i^\beta$$

où l'on somme sur les λ_i^j diviseurs exceptionnels associés aux points éclatés sur C_i^j.

On recouvre donc X_{i+1} des courbes $C_{i+1}^1, C_{i+1}^2, \ldots, C_{i+1}^{s_i}, \underbrace{E_i^1}_{C_{i+1}^{s_i+1}}, \ldots, \underbrace{E_i^{t_i}}_{C_{i+1}^{s_{i+1}}}$ où $s_{i+1} = s_i + t_i$.

Pour appliquer le résultat de Hansen, il faut définir G_i, $H_i \in \mathrm{Div}\, X_i$ tels que :

1. H_i est nef,
2. $H_i.C_i^j > 0$,
3. $G_i.C_i^j \geq 0$,
4. $C_i^j.H_i > G_i.H_i$,
5. $n_i > \sum_j G_i.C_i^j$.

Lomont affirme que H_i nef $\Rightarrow$ H_{i+1} nef... Mais ?

Pour appliquer le résultat de Hansen, il faut définir G_i, $H_i \in \operatorname{Div} X_i$ tels que :

1. H_i est nef,
2. $H_i.C_i^j > 0$,
3. $G_i.C_i^j \geq 0$,
4. $C_i^j.H_i > G_i.H_i$,
5. $n_i > \sum_j G_i.C_i^j$.

Lomont affirme que H_i nef $\Rightarrow H_{i+1}$ nef... Mais ?

Idée : Choisir G_0 et H_0 sur X_0 et définir par récurrence

$$H_{i+1} = h\pi_i^* H_i - \sum_j E_i^j \text{ et } L_{i+1} = h\pi_i^* L_i - \sum_j E_i^j$$

avec $h \in \mathbb{N}^*$ à choisir pour que les conditions précédentes soient réalisées.

Pour appliquer le résultat de Hansen, il faut définir G_i, $H_i \in \mathrm{Div}\, X_i$ tels que :

1. H_i est nef,
2. $H_i.C_i^j > 0$,
3. $G_i.C_i^j \geq 0$,
4. $C_i^j.H_i > G_i.H_i$,
5. $n_i > \sum_j G_i.C_i^j$.

Lomont affirme que H_i nef $\Rightarrow H_{i+1}$ nef... Mais ?
Idée : Choisir G_0 et H_0 sur X_0 et définir par récurrence

$$H_{i+1} = h\pi_i^* H_i - \sum_j E_i^j \text{ et } L_{i+1} = h\pi_i^* L_i - \sum_j E_i^j$$

avec $h \in \mathbb{N}^*$ à choisir pour que les conditions précédentes soient réalisées.

Lemme [Lomont]

Les conditions 2,3 et 4 sont respectées si et seulement si

$$h > \max_j \{q+1, \lambda_0^j\} \text{ et } \frac{t_0}{h^2} \geq H_0.G_0$$

Pour appliquer le résultat de Hansen, il faut définir G_i, $H_i \in \mathrm{Div}\, X_i$ tels que :

1. H_i est nef,
2. $H_i.C_i^j > 0$,
3. $G_i.C_i^j \geq 0$,
4. $C_i^j.H_i > G_i.H_i$,
5. $n_i > \sum_j G_i.C_i^j$.

Lomont affirme que H_i nef $\Rightarrow H_{i+1}$ nef... Mais ?

Idée : Choisir G_0 et H_0 sur X_0 et définir par récurrence

$$H_{i+1} = h\pi_i^* H_i - \sum_j E_i^j \text{ et } L_{i+1} = h\pi_i^* L_i - \sum_j E_i^j$$

avec $h \in \mathbb{N}^*$ à choisir pour que les conditions précédentes soient réalisées.

Lemme [Lomont]

Les conditions 2,3 et 4 sont respectées si et seulement si

$$h > \max_j \{q+1, \lambda_0^j\} \textit{ et } \frac{t_0}{h^2} \geq H_0.G_0$$

Et pour la dernière condition ?

Définition

Une *surface réglée* est une surface X munie d'une morphisme surjectif $\pi : X \to C$ sur une courbe C lisse tel que chaque fibre $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^1$ pour tout $y \in C$ et π admet une section $\sigma : C \to X$ (i.e. $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_C$).

Définition

Une *surface réglée* est une surface X munie d'une morphisme surjectif $\pi : X \to C$ sur une courbe C lisse tel que chaque fibre $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^1$ pour tout $y \in C$ et π admet une section $\sigma : C \to X$ (i.e. $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_C$).

Propriétés des surfaces réglées

1. $\mathrm{Num}\, X = F\mathbb{Z} + C_0\mathbb{Z}$ *où* F *est une fibre et* $C_0 = \sigma(C)$ *telles que* $C_0.F = 1$, $F^2 = 0$ *et* $C_0^2 = -e$,
2. *Si* C *est de genre* g, *alors* $p_\alpha(X) = -g$,
3. $K_X \equiv -2C_0 + (2g - 2 - e)F$,
4. *Soit* p *la caractéristique de* $\mathbb{F}_q$. *On définit*

$$\kappa = \begin{cases} e & \text{si } e \geq 0 \\ \frac{1}{2}e & \text{si } e < 0 \text{ et } g < 2 \\ \frac{1}{2}e + \frac{g-1}{p} & \text{si } e < 0 \text{ et } g \geq 2 \end{cases}$$

Un diviseur $H \equiv aC_0 + bF$ *est ample (resp. nef) si* $a > 0$ *et* $b > a\kappa$ *(resp. et* $b \geq a\kappa$*).*

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e + \delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e + \delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e+\delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e+\delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H \, : \, a + b > 2g - e - 4$

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e + \delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H$: $a + b > 2g - e - 4$

Paramètre du code [Bouganis]

- $n = \sum_{i=1}^{m} \#C_i(\mathbb{F}_q)$

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e + \delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H \, : \, a + b > 2g - e - 4$

Paramètre du code [Bouganis]

- $n = \sum_{i=1}^{m} \#C_i(\mathbb{F}_q) = mM$,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e + \delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H$: $a + b > 2g - e - 4$

Paramètre du code [Bouganis]

- $n = \sum_{i=1}^{m} \#C_i(\mathbb{F}_q) = mM$,
- $k = \dfrac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1 + h^1(G)$

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e+\delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H$: $a + b > 2g - e - 4$

Paramètre du code [Bouganis]

- $n = \sum_{i=1}^{m} \#C_i(\mathbb{F}_q) = mM$,
- $k = \dfrac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1 + h^1(G) = ab + a + b + 1 - \dfrac{e(a^2+a)}{2} - g(a+1) + h^1(G)$,

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e + \delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e+\delta_i)F)(C_0 + (e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H$: $a + b > 2g - e - 4$

Paramètre du code [Bouganis]

- $n = \sum_{i=1}^{m} \#C_i(\mathbb{F}_q) = mM$,
- $k = \dfrac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1 + h^1(G) = ab + a + b + 1 - \dfrac{e(a^2+a)}{2} - g(a+1) + h^1(G)$,
- $d \geq \left(m - \dfrac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta)$

Supposons $e \geq 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on considère une section σ_i de π et on note $C_i = \sigma_i(C) \equiv C_0 + (e+\delta_i)F$. Alors $\#C_i(\mathbb{F}_q) = \#C(\mathbb{F}_q) = M$.
On note $\delta = \min_i \delta_i$ et $\Delta = \max_i \delta_i$.

1. $G \equiv aC_0 + bF$ effectif,
2. $H \equiv C_0 + (e+1)F$ nef,
3. $C_i.H = (C_0 + (e+\delta_i)F)(C_0+(e+1)F) = \delta_i + e + 1 \geq \delta + e + 1 \geq \underbrace{\delta + e + 1}_{\alpha}$,
4. $\#C_i(F_q) = M$,
5. $G.C_i = (aC_0 + bF).(C_0 + (\delta_i + e)F) = a\delta_i + b \leq \beta \leq M \leq \underbrace{a\Delta + b}_{\beta}$,
6. $G.H > K.H : a + b > 2g - e - 4$

Paramètre du code [Bouganis]

- $n = \sum_{i=1}^{m} \#C_i(\mathbb{F}_q) = mM$,
- $k = \dfrac{G^2 - G.K}{2} + p_\alpha + 1 + h^1(G) = ab + a + b + 1 - \dfrac{e(a^2+a)}{2} - g(a+1) + h^1(G)$,
- $d \geq \left(m - \dfrac{G.H}{\alpha}\right)(M - \beta) = \left(m - \dfrac{a+b}{\delta+e+1}\right)(M - (a\Delta + b))$.

Possibilité de construction de grandes familles...

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \dots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \dots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec $a, b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \ldots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,
3. $F_i.H = 1$

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \dots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,
3. $F_i.H = 1$
4. $\# F_i(\mathbb{F}_q) = q + 1$,

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \dots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,
3. $F_i.H = 1$
4. $\# F_i(F_q) = q + 1$,
5. $G.F_i = a$

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \ldots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,
3. $F_i.H = 1$
4. $\#F_i(F_q) = q + 1$,
5. $G.F_i = a$
6. $G.H = (aC_0 + bF).(C_0 + \lceil \kappa \rceil F) = a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Donc $l \leq a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Paramètre du code [Hansen]

- $n = (q + 1)m$,

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \ldots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,
3. $F_i.H = 1$
4. $\# F_i(\mathbb{F}_q) = q + 1$,
5. $G.F_i = a$
6. $G.H = (aC_0 + bF).(C_0 + \lceil \kappa \rceil F) = a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Donc $l \leq a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Paramètre du code [Hansen]

- $n = (q + 1)m$,
- $k = l(G)$,

On recouvre les points rationnels de X par les fibres $F_1, \dots, F_m$ au-dessus les points rationnels de C. Donc $F_i \equiv F$.

1. $G = aC_0 + bF$ avec a, $b \geq 0$ effectif,
2. $H = C_0 + \lceil \kappa \rceil F$ nef,
3. $F_i.H = 1$
4. $\#F_i(\mathbb{F}_q) = q + 1$,
5. $G.F_i = a$
6. $G.H = (aC_0 + bF).(C_0 + \lceil \kappa \rceil F) = a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Donc $l \leq a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Paramètre du code [Hansen]

- $n = (q + 1)m$,
- $k = l(G)$,
- $d \geq n - (\#C(\mathbb{F}_q) - l)a - l(q + 1)$.

où $l = a(\lceil \kappa \rceil - e) + b$.

Remarque : Si $X \cong \mathbb{P}(S(\mathcal{E}))$, $l(G) = h^0(C, S^a(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_C(bP_0))$.

Particularité de $\mathbb{P}^1$ *:*
On peut écrire $\mathcal{E} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e)$ avec $e \geq 0$ car $\mathbb{P}(S(\mathcal{E})) = \mathbb{P}(S(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(n)))$.
Et $S^a(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}(bP_0) \cong \bigoplus_{j=0}^{a} \mathcal{O}(b - ja)$.

Paramètre du code [Lomont]

- $n = (q+1)^2$,

Particularité de $\mathbb{P}^1$ *:*
On peut écrire $\mathcal{E} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e)$ avec $e \geq 0$ car $\mathbb{P}(S(\mathcal{E})) = \mathbb{P}(S(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(n)))$.
Et $S^a(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}(bP_0) \cong \bigoplus_{j=0}^{a} \mathcal{O}(b - ja)$.

Paramètre du code [Lomont]

- $n = (q+1)^2$,
- $k = \sum_{j=0}^{a} (b - je + 1)$,

Particularité de $\mathbb{P}^1$ *:*
On peut écrire $\mathcal{E} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e)$ avec $e \geq 0$ car $\mathbb{P}(S(\mathcal{E})) = \mathbb{P}(S(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(n)))$.
Et $S^a(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}(bP_0) \cong \bigoplus_{j=0}^{a} \mathcal{O}(b - ja)$.

Paramètre du code [Lomont]

- $n = (q+1)^2$,
- $k = \sum_{j=0}^{a} (b - je + 1)$,
- $d \geq (q+1-a)(q+1-b)$.

où l'on somme les termes positifs uniquement, $0 \leq a,\ b \leq q+1$ *et* $e \geq 0$.