

# A isomorphisme près vs A birationalité près. 2

Eca est un condensé (en moins bien!) du chapitre II du livre de Beauville "Surfaces algébriques complexes".

Sont  $X$  et  $Y$  deux surfaces projectives lisses. Comme à l'accoutumée, on distingue deux types d'applications entre  $X$  et  $Y$ :

\* les applications régulières ou les morphismes.  $\checkmark$  <sup>notés</sup>  $X \rightarrow Y$

\* les applications rationnelles (<sup>notés</sup> régulières au cas conrat en gras)  $X \dashrightarrow Y$

Les premiers sont de finies partout par définition, les seconds ne sont pas à priori de finies partout mais on montre que le lieu d'indétermination est de codimension au moins 2. Du coup, dimension 2 oblige, une application rationnelle est de finie régulière sur le complémentaire d'un nombre fini de points.

Ecb permet de définir trois types d'iso <sup>bi</sup> quelque chose:

\* un isomorphisme  $\varphi: X \rightarrow Y$  est un morphisme admettant <sup>ou un morphisme bi-régulier</sup> une réciproque elle est un morphisme.  $X \xrightarrow{\varphi} Y$

\* une application bi-rationnelle  $\varphi: X \rightarrow Y$  est une application rationnelle admettant une réciproque elle est un morphisme rationnelle.  $X \dashrightarrow Y$

\* un morphisme bi-rationnel  $\varphi: X \rightarrow Y$  est un morphisme admettant une réciproque qui est une application rationnelle.  $X \dashrightarrow Y$

On dispose d'un prototype de morphisme bi-rational: l'éclatement.

On commence par le de'finit sur un voisinage affine  $\mathbb{A}^2$  en  $(0,0)$ : c'est la reunion de  $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$  d'equation

$$\left\{ (x,y), (u:v) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

La premiere projection fournit un morphisme  $\widehat{\mathbb{A}^2} \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^2$

On verifie que  $\pi^{-1}(0,0) \simeq \mathbb{P}^1$ .

Ex. Eclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $(0:0:1)$ . E est la reunion de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

definie par  $\left\{ (x_0:x_1:x_2), (u_0:u_1) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid \begin{vmatrix} x_0 & u_0 \\ x_1 & u_1 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \widehat{\mathbb{P}^2}$

que l'on projete sur  $\mathbb{P}^2$ .  $\pi: \widehat{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$

Si  $p = (x_0:x_1:x_2) \neq (0:0:1)$  c'est a dire si  $x_0, x_2$  ne sont

pas tous deux nuls, alors  $\pi^{-1}(x_0:x_1:x_2) = \{(x_0:x_1:x_2), (x_0:x_1)\}$

et bien sur  $\pi^{-1}(0:0:1) = (0:0:1) \times \mathbb{P}^1$ .

De facon generale, on a

[B par II.3 p.17]

Th<sup>v</sup> Soit  $X$  une surface et  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  l'eclatement de  $X$  en un point  $p$ . On note  $E$  la droite exceptionnelle.

Alors

(i)  $\pi^*$  est une isométrie pour l'intersection:

$$(\pi^*D, \pi^*D') = (D, D') \quad \forall D, D' \in \text{Div}(X)$$

$$(E, \pi^*D) = 0 \quad \text{"E n'intersecte pas les fibres"}$$

$$E^2 = -1$$

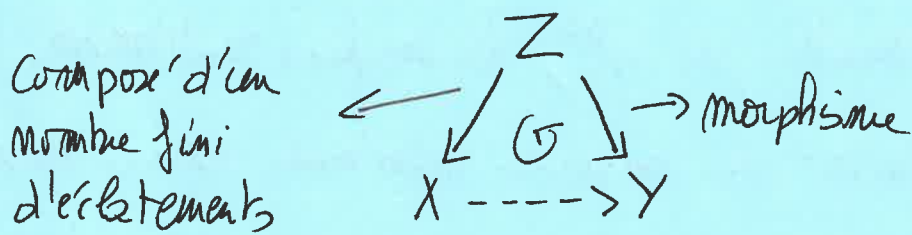
(ii) De plus l'application  $\text{Num}(\tilde{X}) \leftrightarrow \text{Num}(X) \oplus \mathbb{Z}$  est un

$$D + mE \leftrightarrow (D, m) \quad \text{isom.}$$

(iii)  $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + E$

On dispose de deux résultats structurants forts:

Th [levé d'indétermination] Soit  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  une application rationnelle entre surfaces projectives (il faut surtout que  $Y$  le soit) alors il existe une surface  $Z$  s'inscrivant dans le triangle



Composé d'un nombre fini d'éclatements

[Spitzi, Th 2.1]

reproim: quitte à éclater plusieurs fois, on peut lever les indéterminations d'une application rationnelle.

Th <sup>factorisation</sup> [structure des morphismes birationnels] Tout morphisme birationnel  $\varphi: X \rightarrow Y$  est la composée d'un nombre fini d'éclatements et d'isomorphisme

La flèche de droite a les mêmes propriétés que celle de gauche dans le triangle du dessus.

[Spitzi, Th 2.2 preuve p. 3] sketch

### Surfaces minimale

Def Une surface  $X$  est dite minimale si tout morphisme birationnel  $X \rightarrow Y$  est un isomorphisme.

$E$  est une suite d'objet terminal<sup>cor</sup> dans une classe birationnelle.

Prop Toute surface  $X$  domine une surface minimale  $X_0$ , c'est-à-dire qu'il existe  $X_0$  minimale et  $\varphi: X \rightarrow X_0$  un morphisme birationnel.

( $X$  non minimale  $\Rightarrow \exists X \rightarrow X$ , morphisme birationnel non isomorphisme  $\Rightarrow$  comp d'éclatements qui font chuter le rg du spa de NS ou fini)

Du coup les surfaces minimales constituent un système de représentants des classes d'isomorphisme birationnel.

Dans la plus part des cas, on veut que ce représentant est unique <sup>(à isom. près)</sup> mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple la classe birationnelle de  $\mathbb{P}^2$ , les surfaces rationnelles, contient une infinité de surfaces minimales non isomorphes.

En fin on dispose d'une caractérisation des surfaces minimales

(Th) Une surface  $X$  est minimale si elle ne contient pas de  $(-1)$ -courbes c-à-d de courbes isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , d'auto-intersection  $-1$ .

En bref: quand on s'intéresse aux surfaces à équivalence birationnelle près, on peut se concentrer sur les surfaces minimales.

# Invariants discrets.

Commençons par rappeler le cas des courbes: on sait bien que l'invariant discret qui initie la classification est le *genre*. Et dernier a une interprétation différentielle forte puisque

$$g(C) = \text{dimension de l'espace des } \overset{\text{1-formes}}{\text{différentiels différentiels holomorphes}} \\ \text{réguliers} \\ = \dim H^0(X, \Omega^1) \text{ sections globales du faisceau} \\ \text{des 1-formes différentielles.}$$

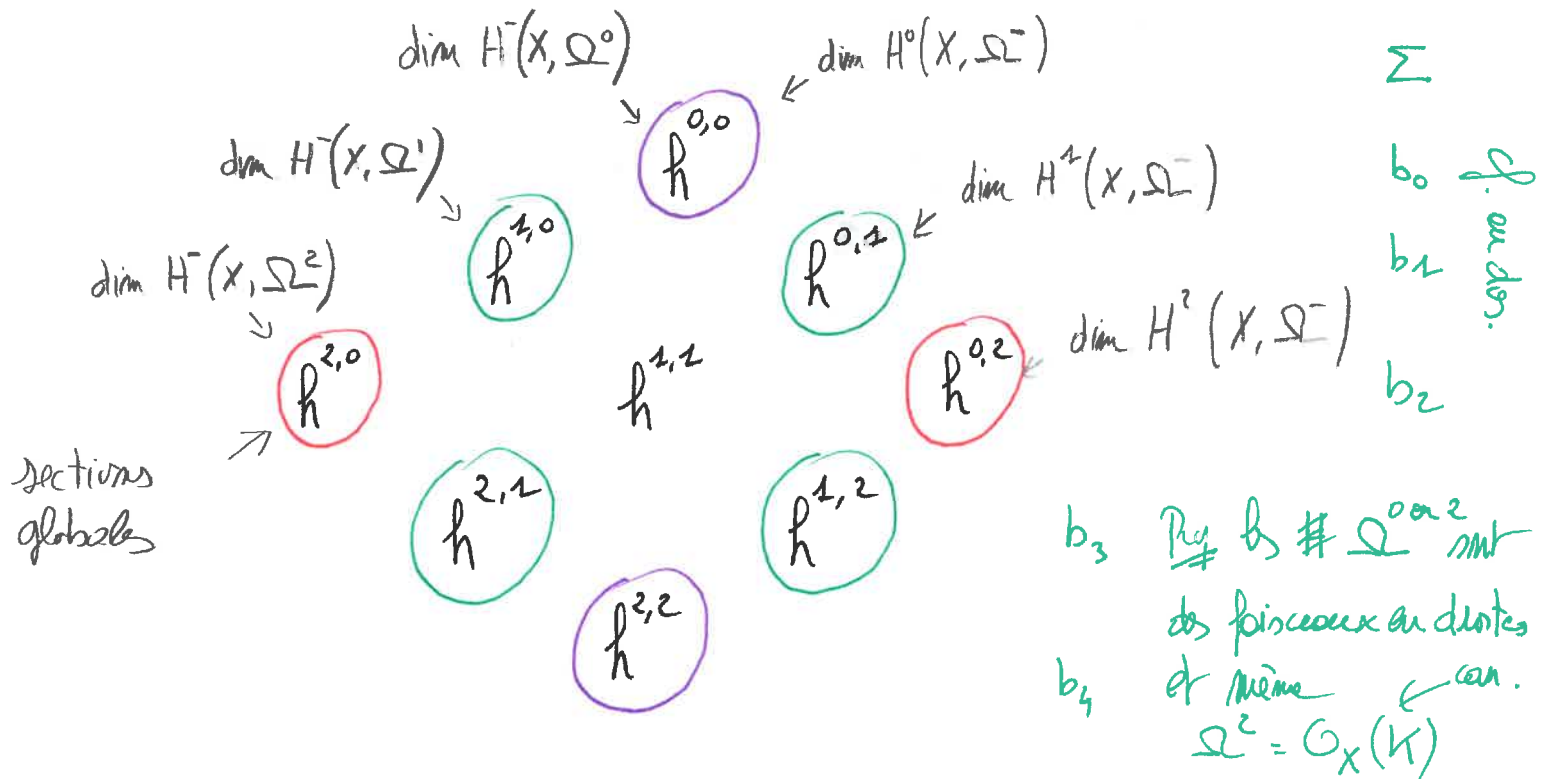
La classification des surfaces suit la même voie, sauf qu'il y a plus d'invariants discrets rentrent en jeu puisque l'on peut y examiner les 1-formes, les 2-formes et même les 0-formes i.e. des fonctions ~~rationnelles~~ régulières.

On a coutume d'organiser les invariants en diagramme:



# Un diamant de Hodge sur $\mathbb{C}$

Soit  $X$  une surface algébrique, on pose  $h^{i,j} = \dim H^j(X, \Omega^i)$  où  $0 \leq j \leq 2$ . Il est coutume de les représenter organisés ainsi :



La théorie de Hodge (ou la dualité de Serre) [GH p. 105] nous

impose que

\*  $h^{i,j} = h^{2-i, 2-j}$

$\Leftrightarrow$  le diamant est symétrique par rapport au centre.

\*  $h^{i,j} = h^{j,i}$   
« Hodge symmetry ».

$\Leftrightarrow$  le diamant est symétrique par

rapport à la dent verticale passant par son centre.

Rq cette dernière égalité est vraie sur  $\mathbb{C}$  mais pas toujours sur un corps fini.

[Liedtke "Alg. surface in pos. char" p. 13]

Am note

$$\begin{aligned}e(x) &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \\ &= 2 - 4q + 2p_g + h^{1,2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi(x) = \chi(O_x) &= h^0(x, O_x) - h^1(x, O_x) + h^2(x, O_x) \\ &= 1 - q + p_g\end{aligned}$$



Du coup, pour une surface algébrique (ou même au  $\mathbb{C}$ ),  
 ce diamand se résume à simplement ~~trois~~<sup>quatre</sup> dimensions et  
 en fait même seulement ~~deux~~<sup>trois</sup> puisque  $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$   
 donc  $h^{0,0} (= h^{2,2}) = 1$ . Ne restent que ~~deux~~<sup>trois</sup> dimensions d'at deux  
 traditionnellement notés :

$$p_g = p_1 = h^{2,0} = \dim H^0(X, \Omega^2) \quad \text{genre géométrique}$$

$$= \dim \text{ev des 2-formes différentielles régulières}$$

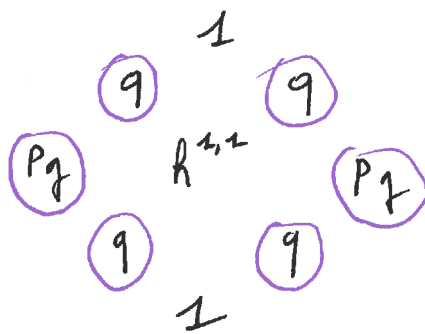
et

$$q = \dim H^0(X, \Omega^1) \quad \text{inégalité!}$$

$$= \dim \text{ev des 1-formes différentielles régulières}$$

$$= \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

Le diamand prend donc l'allure



$p_g$   $\rightarrow$  invariants  
 birationnels  
 [Beauville, prop III.20 p.48].

$h^{2,2}$  m'en est pas car  
 il augmente de 1 par  
 éclatement.

$\Sigma$  sur les lignes.

$$b_0 = b_4 = 1$$

$$b_1 = b_3 = 2q \quad \leftarrow \text{ voir [B p.48]}$$

$$b_2 = 2p_g + h^{2,2} \quad \leftarrow \text{ à vérifier}$$

cf. page précédente

On définit aussi

genre arithmétique.

$$p_a = p_g - q = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1$$

Dernier invariant « discret » de suite de plongements

$$P_m = h^0(X, mK) = h^0(X, (\mathcal{O}_X)^{\otimes m}) \quad m \geq 1$$

Rq cette suite n'est pas forcément croissante car  
le diviseur canonique n'est pas forcément effectif.

Cette suite permet de définir le dernier invariant  
discret important: la dimension de Kodaira  $\kappa = \kappa(X)$   
[R, §C.5.5, p.62].

$$\kappa = \min \left\{ e, \left( \frac{P_m}{m^e} \right)_m \text{ s.e. bornée} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Rq } \kappa \leq 2 \\ \text{RR} \Rightarrow \end{array}$$

(⇒)  $(P_m)_m = \mathcal{O}(m^e)$

$$\kappa = \infty \Leftrightarrow P_m = 0 \quad \forall m \geq 1$$

$$\kappa = 0 \Leftrightarrow (P_m)_m \text{ bornée non identiquement nulle.}$$

$$\Leftrightarrow P_m \in \{0, 1\} \quad \forall m \geq 1 \text{ et } \exists m \text{ t.q. } P_m = 1 \quad \begin{array}{l} [B, p.117] \\ [GH, p.573] \end{array}$$

On montre que

$$\kappa = \max \left\{ \dim \varphi_{mK}(X), \quad m \geq 1 \right\}$$

dimension maximale  
obtenue par plongement  
pluri-canonique application

# Invariants des courbes de genres.

Pour une courbe  $X$  sur  $\mathbb{C}$ , son diamant se résume à

$$g \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ g \end{matrix} \quad \text{où } g \text{ est le genre de } X.$$

On voit bien que l'on distingue trois classes bien différents pour les courbes :

\*  $g=0, K=-2P, H^0(\mathcal{O}_X(K)) = h^0(K) = 0$   
 $mK = -2mP \quad h^0(mK) = 0$

~~tous~~ <sup>pas de</sup> les plongements canoniques <sup>(ils ne sont pas définis)</sup> ne donnent rien : ils n'existent pas. ou ont le vide de dim  $-\infty$ .

\*  $g=1 \quad K=0 \quad H^0(\mathcal{O}_X(K)) = H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C} \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(K)) = 1$

tous les <sup>(plans)</sup> plongements canoniques envoient une courbe elliptique sur  $\mathbb{P}^1$ , c'est-à-dire un point.

\*  $g \geq 2 \quad h^0(mK) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \infty$  et les  $\varphi_{mK} : X \rightarrow \mathbb{P}^{h^0(mK)-1}$

ont toujours une courbe comme image et même une courbe isomorphe à  $X$  pour  $m$  assez grand <sup>c'est le cas très ample  $\Rightarrow$  embedding</sup> sauf si  $X$  est hyperelliptique auquel cas l'image est toujours  $X / \text{inv. ell.} \cong \mathbb{P}^2$



# Invariants d'un produit de courbes.

[Peterson, p.10] 7

[B, Rappel III.22, p.43]

Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes projectives lisses alors

$$P_g(C_1 \times C_2) = g(C_1) \times g(C_2), \quad P_m(C_1 \times C_2) = \dim(mK_1) \times \dim(mK_2)$$

$$g(C_1 \times C_2) = g(C_1) + g(C_2)$$

$K_i$  div canonique de  $C_i$ .  
 $g(C_i)$  genre de  $C_i$ .

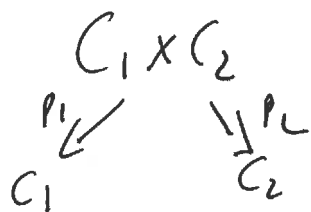
$$\Rightarrow h^0(C_1 \times C_2) \quad \text{cf. [B, Prop VII.4 p.117].}$$

RRA courbe  $\deg D > 2g-2 \Rightarrow \dim(D) = \deg(D) + 1 - g$

$$\begin{aligned} \deg(mK) - \dim(mK) &= (g-1) - \dim(-(m-1)K) \\ &\parallel \\ &= m(2g-2) \end{aligned}$$

$$\dim(mK) = m(2g-2) - (g-1) + \dim(-(m-1)K) \quad m \geq 1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } g=0 \\ 1 & \text{si } g=1 \\ (g-1)(2m-1) & \text{si } g \geq 2 \text{ et } m > 1 \end{cases}$$



car  $-(m-1)K \sim D < 0$

$$H^1(C_1 \times C_2) \simeq p_1^* H^1(C_1) \oplus p_2^* H^1(C_2)$$

$$\Rightarrow \dim(\quad) = 0$$

$$H^0(C_1 \times C_2, \omega_1 \otimes \omega_2) \simeq H^0(C_1, \omega_1) \otimes H^0(C_2, \omega_2)$$



## Stratégie générale

8

L'idée de la classification est d'essayer de cerner quels triplets  $(k, p_g, q)$ , tous invariants birationnels, peuvent apparaître. On procède par couches successives en commençant toujours par essayer de cerner  $k$ .

Depuis Now, au lieu de partir bille en tête, « si  $k = -\infty$  alors ... », on procède autrement selon le

comportement du diviseur canonique  $K$ ; les deux principales critères sont

① sa nef attitude

② son auto-intersection.

Dans un deuxième temps, on cherche à cerner les deux autres invariants  $p_g$  et  $q$ . Si possible, on cherche aussi à trouver une structure plus fine sur  $X$  du genre être fibré etc...





## Classification des p-hypothèse K non nef

Briop Soit  $X$  une surface (proj, linc). Si le diviseur canonique  $K$  m'est pas nef alors soit  $X$  m'est pas minimale  
 soit  $K = -\infty$ , c-à-d que tous les plurigenus sont nuls

(Puisque  $K$  m'est pas nef, il existe une courbe  $C$  sur  $X$  telle que  $(K, C) < 0$ . De deux choses l'une :

\* soit  $C^2 < 0$  auquel cas  $C$  est une  $(-1)$ -courbe ; en effet l'adjonction donne :

$$2g - 2 = \underbrace{C^2}_{< 0} + \underbrace{(C, K)}_{< 0} \leq -2 \Rightarrow g \leq 0 \Rightarrow g = 0 \text{ et } C^2 = (C, K) = -1$$

Du coup  $X$  m'est pas minimale.

\* soit  $C^2 \geq 0$ . On montre que tous les plurigenus ont nuls en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe  $m \geq 1$  tel que  $h^0(mK) \geq 1$ . Alors  $|mK| \neq \emptyset$  et contient un diviseur  $E$  effectif. (ce dernier est non nul car  $(E, C) = m(K, C) < 0$ ).

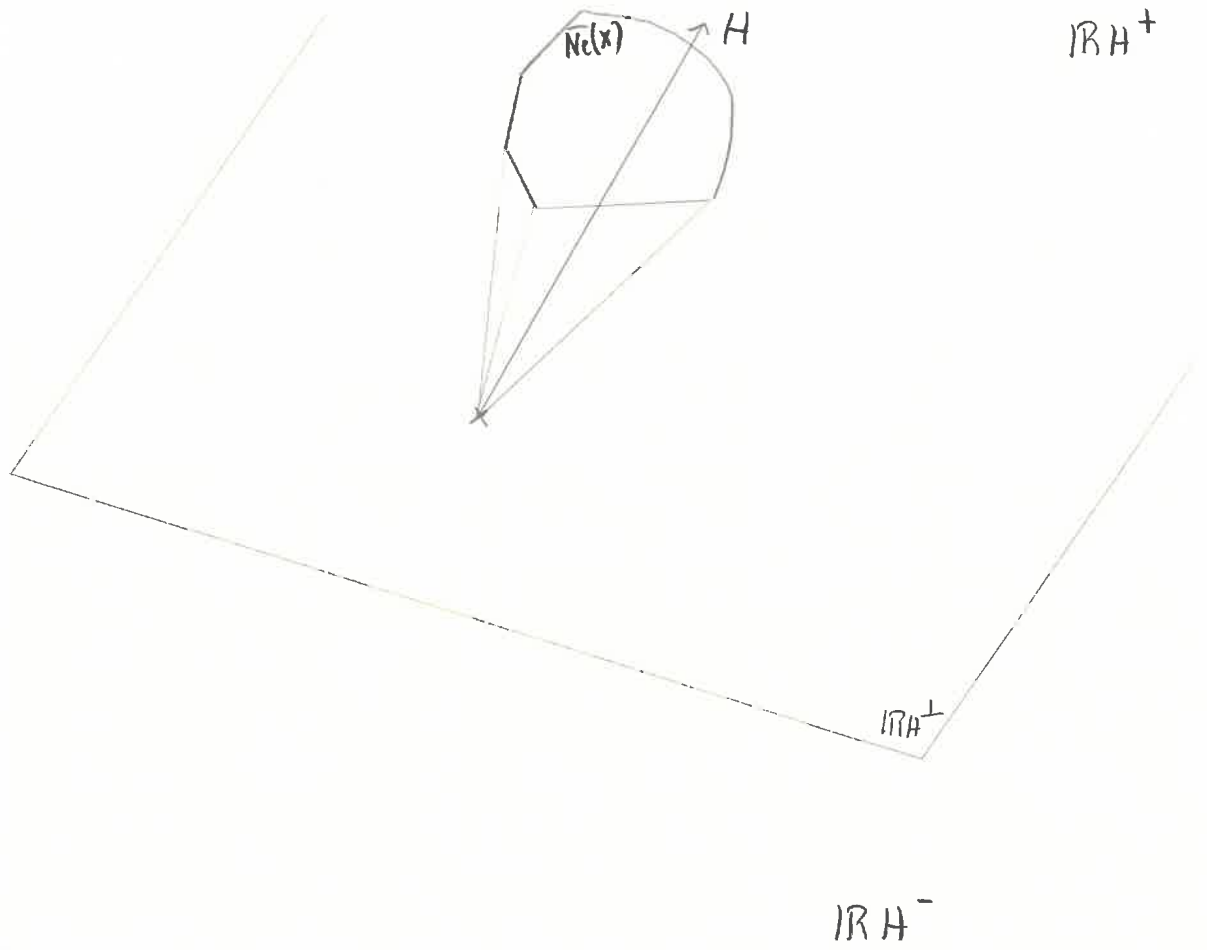
Puisque  $E$  est effectif et comme  $(E, C) < 0$ , nécessairement  $C$  est dans le support de  $E$ . Il s'écrit  $E = \alpha C + \sum \alpha_i C_i$ ,  $C_i \neq C$ ,  $\alpha, \alpha_i \geq 0$ .

Mais alors  $(E, C) = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} C^2 + \sum \underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{(C, C_i)}_{\geq 0} \geq 0$

Contradiction!

Bref }  $K$  non nef  $\Rightarrow$  ou  $X$  non minimale  
 ou  $K = -\infty$ .

De là à dire que c'est « réglé » pour cette partie de la classification, c'est aller vite en besogne.





# Les cônes de l'espace $\text{Num}(X)_{\mathbb{R}}$

Le théorème de l'indice de Hodge donne la signature de la forme bilinéaire d'intersection sur le groupe des  $\mathbb{R}$ -diviseurs à équivalence numérique près, c'est  $(1, 1)^{g-2}$ .

En particulier, pour  $H$  un diviseur ample, vérifiant donc  $H^2 > 0$ , on a la décomposition

$$\text{Num}(X)_{\mathbb{R}} = \underbrace{\mathbb{R}H}_{> 0} \oplus \underbrace{\mathbb{R}H^\perp}_{< 0} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Pg il faudrait} \\ \text{noter } [H] \text{ pour} \\ \text{cône numérique.} \\ \text{l'intersection est déf. } > 0 \\ \text{déf. } < 0. \end{array}$$

Tout diviseur ample découpe donc l'espace  $\text{Num}(X)_{\mathbb{R}}$  en deux sous-espaces (pas vectoriels!),  $\mathbb{R}H^+ = \{D \in \text{Num}(X), (H, D) > 0\}$   
 $\mathbb{R}H^- = \{ \text{---} \} < 0$

se partent par l'hyperplan  $\mathbb{R}H^\perp$ . Comme  $H^2 > 0$ ,  $H$  est du côté positif.

Et étant, on introduit plusieurs cônes convexes dans cet espace :

\*  $N_a(X) = \left\{ \sum_{H \text{ ample}} \alpha_H H, \alpha_H > 0 \right\}$  Cône ample

\*  $N_e(X) = \left\{ \sum_{D \text{ eff.}} \alpha_D D, \alpha_D \geq 0 \right\}$  Cône effectif ou Cône des courbes.

son adhérence  $\overline{N_e(X)}$

\*  $N_{ef}(X) = \left\{ \sum_{D \text{ nef}} \alpha_D D, \alpha_D \geq 0 \right\} = \overline{N_e(X)}$  \* ← dual

Pg  $N_a(X) \subset N_e(X)$

↳  $D \text{ nef} \Leftrightarrow (D, C) \geq 0 \quad \forall C$  courbe irréductible

La caractérisation de l'amplitude à la Nakai-Moishezon, c-à-d  $H$  ample  $\Leftrightarrow H^2 > 0$  et  $(H, C) > 0 \forall C$  courbe irréductible nous assure que  $N_e(X)$  se trouve dans tous les parties positives  $\mathbb{R}H^+$ , pour  $H$  ample.  
 $\hookrightarrow$  du même côté que  $H$  lui-même.

Mais Kleiman donne une autre caractérisation de l'amplitude purement numérique celle-ci.

Prop Un diviseur  $H$  est ample  $\Leftrightarrow (H, D) > 0 \forall D \in \overline{N_e(X)}$   
 Autrement dit  $H$  coupe positivement (strictement) toutes les courbes ainsi que leurs « limites » dans  $\text{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ .  
 Autrement dit aussi  $N_a(X) \subset \overline{N_e(X)}$  et même dans son intérieur.

On en déduit aussi que  $\overline{N_a(X)} = N_{ef}(X)$   $\rightarrow$  coupe  $> 0$  les éléments de  $\overline{N_e(X)}$   
 En particulier :  $\hookrightarrow$  coupe  $> 0$  les éléments de  $\overline{N_e(X)}$

$$N_{ef}(X) \subset \overline{N_e(X)} \quad \text{puisque} \quad N_a(X) \subset N_e(X)$$

En bref

$$N_a(X) \subset \overline{N_a(X)} = N_{ef}(X) \subset \overline{N_e(X)} \quad \text{et tous ces} \\ \text{concepts sont} \\ \text{équivalents et} \\ \text{du côté plus d'un ample.}$$

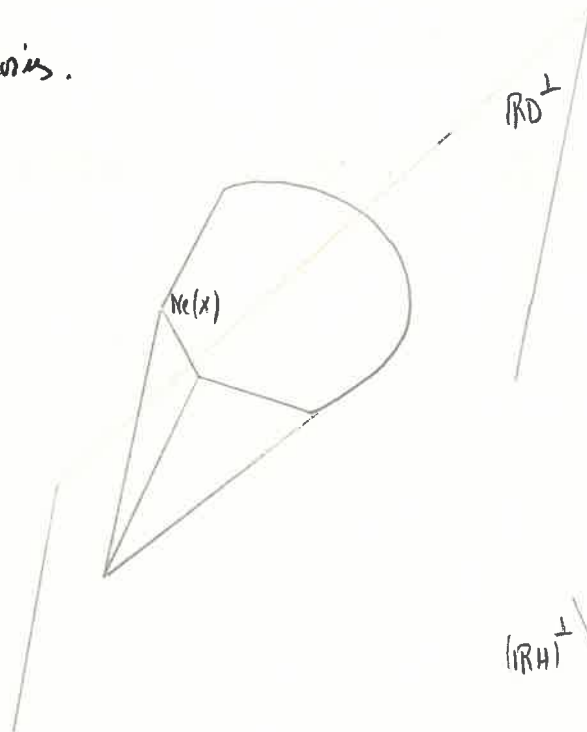
Faisons rentrer un diviseur  $D$  non nef dans le tableau. 12

Soit  $D$  un diviseur qui n'est pas nef : il ne vérifie pas

$$\forall C \text{ courbe irréductible, } (D, C) \geq 0$$

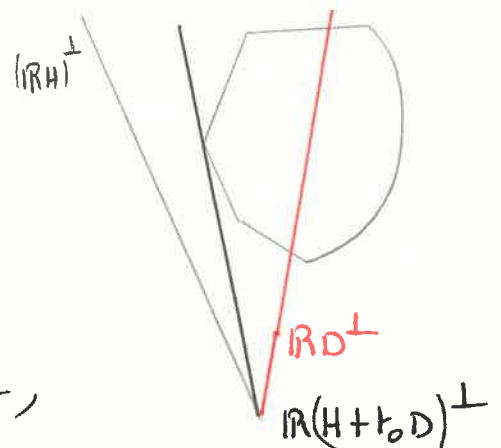
donc il existe une courbe  $C$  telle que  $(D, C) < 0$ .

Dans  $\text{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ , cela veut dire qu'une partie du cône des courbes  $\overline{NE}(X)$  se trouve dans la partie plus de  $\mathbb{R}D$ , l'autre dans la partie moins.



L'hyperplan  $\mathbb{R}D^{\perp}$  vient trancher au-dessus le cône des courbes  $\overline{NE}(X)$

Image coupée à une certaine altitude  $\geq 0$



Si  $H$  est un diviseur (très) ample,

on peut regarder les diviseurs  $H + tD$  quand

$t$  varie dans  $\mathbb{R}_+$ . A l'ordre pour  $t=0$ ,  $\mathbb{R}H^{\perp}$  se coupe l'espace en deux

de telle sorte que  $\overline{NE}(X)$  est du côté plus. Puis  $t$  grandissant  $\mathbb{R}(H+tD)^{\perp}$

va finir par couper  $\overline{NE}(X)$  en deux parties

$$(H + tD, C) = \underbrace{(H, C)}_{> 0} + t \underbrace{(D, C)}_{< 0} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

L'ensemble des  $t$  st tels que  $H + tD$  reste nef  
est borné, par exemple par  $\frac{(H, C)}{-(D, C)}$  et on peut  
donc introduire le :

$$t_0 = \sup \{ t \in \mathbb{R}, H + tD \text{ st nef} \}$$

On a le ce-là

{Th (de rationalité-) Dans le contexte précédent,  $t_0 \in \mathbb{Q}$ .



On suppose donc que  $K$  n'est pas nef et on note  $H$  un <sup>diviseur 13</sup> ample

tels que

$$L = aH + bK \text{ est nef, } \frac{a}{b} = \sup\{t \in \mathbb{R}, H + tK \text{ nef}\}$$

$$L - \varepsilon K \text{ est ample } \forall \varepsilon > 0$$

En particulier pour tout  $m \geq 1$ , le diviseur  $mL - K$  est ample.

On en déduit que  $H^0(-(mL - K)) = 0$  (rappel un diviseur ample  $H$  vérifie toujours  $H^0(-H) = 0$ ). Dualité de Serre, cela donne pour  $mL$ :

$$h^2(mL) = h^0(K - mL) = h^0(-(mL - K)) = 0$$

Du coup, Riemann-Roch appliqué à  $mL$  devient:

$$h^0(mL) \geq h^0(mL) - h^1(mL) = \chi(O_X) + \frac{1}{2}(mL, mL - K)$$

À partir de là, on distingue plusieurs cas

\* Soit  $L^2 > 0$ . Comme  $L$  est nef, pour toute courbe  $C$ , on a  $(L, C) \geq 0$ . Montrons qu'en fait  $(L, C) > 0$  en raisonnant par l'absurde. Supposons que  $(L, C) = 0$  alors comme  $L^2 > 0$ , le théorème de l'indice de Hodge nous apprend que  $C^2 < 0$ .  $\rightarrow$  Pourquoi pas nul? car  $C \neq 0$

D'autre part,  $(L, C) = 0 \Rightarrow (aH + bK, C) = a(H, C) + b(K, C) = 0$   
 $\Rightarrow C \neq 0$  ce fait avant d'ac!  $\rightarrow$

donc  $(K, C) < 0$ . Bref on vient de prouver que  $(K, C) < 0$  et  $C^2 < 0$

On voit que cela n'est possible que si  $C$  est une  $(-1)$ -courbe. Comme  $X$  est minimal, c'est impossible. Ainsi  $(L, C) > 0$

Mais alors  $L$  est ample. Impossible. Conclusion  $L^2 > 0$  impossible.

\*  $L^2 = 0$ . Remarquons que  $(L, H) \geq 0$  (un multiple de  $H$  est effectif et  $L$  est nef). Encore deux cas.

•  $(L, H) > 0$ . Alors  $L$  est en fait un certificat de la nefitude de  $H$ .

$$\begin{aligned} R_q^0 L^2 &= (L, aH + bK) \\ &= a(L, H) + b(L, K) \\ &\stackrel{>0}{\Rightarrow} (L, K) < 0 \end{aligned}$$

$$L^2 = 0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{1}{a}L, L\right) = \left(H + \frac{b}{a}K, L\right) = \underbrace{(H, L)}_{>0} + \frac{b}{a}(K, L)$$

si bien que  $(K, L) < 0$  et

$$h^0(mL) \geq \chi(O_X) + \frac{m}{2}\chi(-K, L) = O(m)$$

$$\begin{aligned} 0 = L^2 &\Rightarrow \text{on a } C^2 = (C, L) \\ &= (C, aH + bK) \\ &= a(C, H) + b(C, K) \\ &\stackrel{>0}{\Rightarrow} (C, H) > 0 \quad \stackrel{>0}{\Rightarrow} (C, K) < 0 \end{aligned}$$

(ω ample  $\Rightarrow (C, H) < 0$ )

Le système linéaire  $|mL|$  finit par être non vide. Quitte à remplacer  $L$  par un multiple assez grand, on suppose que  $|L| \neq \emptyset$ . Soit  $C$  une courbe irréductible de  $|L|$ . Alors  $C^2 = 0$  et  $(C, K) < 0$  donc, formule du genre oblige, on en déduit que  $g(C) = 0$ .

Supposons pour simplifier que  $|L|$  est sans composante fixe. Alors comme  $L^2 = 0$ , elle n'a pas de point base non plus et on dispose d'un morphisme  $\varphi_L: X \rightarrow \mathbb{P}^{e(L)-1}$  tel que par construction  $L \sim \varphi_L^* H \rightarrow$  un hyperplan de  $\mathbb{P}^{e(L)-1}$ . Soit  $C \in |L|$  irréductible. Alors d'après la formule de projection, on a :

$$0 = L^2 = C^2 = (C, \varphi_L^* H) = (\varphi_{L*} C, H)$$

Du coup  $\varphi_{L*}(C)$  ne peut être qu'un point car une courbe intersecte toujours un hyperplan dans un projectif. Bref  $\varphi_L$  contracte donc tous les éléments du système  $|L|$ . Ainsi  $\varphi(X)$  est une courbe

Du coup, dans ce cas on aboutit à  $X$  géométriquement  
 régulière : il existe  $C$  une courbe (l'inv. proj...) et un  
 morphisme surjectif  $X \xrightarrow{\pi} C$  dont les fibres sont des  $\mathbb{P}^2$ .  
 Admettons que  $X$  est alors birationnelle à  $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^2$ ,  
 on en déduit les invariants  $p_g, q$  de  $X$  en plus de  $K$  qui  
 on le sait vaut  $-\infty$ .

• reste le cas  $(L, H) = 0$ . Comme on a aussi  $L^2 = 0$ ,  
 le théorème de l'indice de Hodge nous donne que  $L = 0$   
 Revenant à la définition de  $L$ , on en déduit  
 que  $H$  et  $-K$  appartiennent au même rayon dans  $\text{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ .  
 Cela commence à sentir  $\mathbb{P}^2$  et  $-3H = K$  à plein nez  
 mais ce n'est pas si facile à établir. Est pourtant  
 vrai. On en déduit le table des  $(K, p_g, q)$  possibles.



# Classification sous l'hypothèse $K$ nef

R<sub>1</sub> ① Puisque  $K$  est nef  $(K, C) \geq 0$  pour toute courbe et donc  $X$  ne contient aucune  $(-1)$ -courbe (les droites courent  $K$  négativement). Bref  $X$  est forcément minimale.

② Puisque  $K$  est nef, on voit que  $K^2 \geq 0$ .

On cherche à montrer que  $K$  nef  $\Rightarrow K^2 \geq 0$  et ce faisant on glane des informations plus précises.

$$K \text{ nef} \Rightarrow K^2 \geq 0$$

Cela revient à vérifier qu'il existe au moins un plongement non nul.

On distingue deux cas :

①  $K^2 > 0$  (les faciles). Riemann-Roch appliqué à  $K$  en négligeant le  $h^1$  donne pour  $m \geq 1$

$$h^0(mK) + h^0(-(m-1)K) \geq \chi(O_X) + \frac{m(m-1)}{2} K^2$$

On remarque que  $h^0(-(m-1)K) = 0$  car sinon, il existerait un diviseur effectif  $E \in |-(m-1)K|$  (nécessairement non trivial nul car cela contredirait  $K^2 > 0$ ). Du coup on avait

$$K^2 = \frac{-1}{m-1} (-(m-1)K, K) = \frac{-1}{m-1} (E, K) \leq 0$$

Pq on peut utiliser le lemme sur la nullité de  $h^0(-D)$  quand  $D$  nef  $\neq 0$ . car  $E$  effectif et  $K$  nef

Contradiction.

Dès lors  $h^0(mK) \sim m^2 \frac{K^2}{2}$  et  $\chi_K = 2$  même.

En fait on a l'équivalence

( Prop Supposons  $K$  nef. Alors  
 $K^2 > 0 \iff K = 2$

( On veut de montrer au des l'implication  $\Rightarrow$ .

La réciproque  $\Leftarrow$  nécessite le théorème d'annulation de Kodaira qui stipule que si  $D$  est nef et gros (en fait ample) alors  $h^i(K+D) = 0$  pour  $i > 0$ .

Si  $K = 2$ , alors  $K$  est big et donc les  $h^i(mK)$  sont nuls pour  $m \geq 2$  et  $i > 0$ . Du coup  $RR$  pour  $m \geq 2$  se réécrit

$$h^0(mK) = \frac{m(m-1)}{2} K^2 + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Pour que cette suite soit équivalente à une  $c_1 \times m^2$ , il est bien nécessaire que  $K^2 > 0$

( Plus précisément  $\Rightarrow$  on peut montrer que  $P_2 \geq 1$  (le 2-ème plus-gros est non nul)

②  $K^2 = 0$  (cas difficile).

Le premier enjeu est toujours de cerner la dimension de Kodaira  $K$ . On souhaite montrer que  $K \geq 0$ , ce qui revient à prouver qu'au moins un pluri-courbe est non nul.

Rq préliminaire. Si jamais  $K \neq 0$  alors  $h^0(nK) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$  pour tout  $n$  et on a bien  $K \geq 0$  presque même  $K = 0$ .

On peut donc sans perte de généralité supposer que  $K \neq 0$ .  
Ce qui nous permet d'utiliser que :

$$\begin{array}{l} K \text{ nef} \\ K \neq 0 \end{array} \Rightarrow h^0(-K) = 0$$

Du corps  $\mathbb{R}$  appliqué à  $2K$  devient

$$h^2(2K) - h^1(2K) + h^0(2K) = \chi(\mathcal{O}_X) + K^2$$

$\begin{array}{ccc} \text{" DS} & \geq 0 & \text{"} \\ h^0(-K) & & 0 \\ \text{"} & & \end{array}$

dmc

$$P_2 = h^0(2K) \geq 1 + P_2 - q \quad (**)$$

Étant donné, on pose en revue les cas où on peut directement conclure concernant  $K$ .

\* Si  $P_2 > 0$ , alors la suite  $(P_m)_m$  est  $\uparrow$  et on a même  $P_m > 0 \forall m$  (en effet  $P_2 > 1 \Rightarrow K \sim E$  effectif  $\Rightarrow H^0(mE) \subset H^0((m+1)E)$ )  
 $\Rightarrow K \geq 0$ .

\* Si  $q = 0$  alors  $(*) \Rightarrow P_2 \geq 1 \Rightarrow K \geq 0$ .

\* Reste le cas de favorable où  $P_2 = 0$  et où  $q > 0$

Vérifions que cela n'est possible que si  $q = 1$ .

C'est le th de Noether qui nous permet de l'affirmer car il prétend que :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{K^2 + e}{12} \rightarrow b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 2 - 4q + 2P_2 + h''$$

$$1 + P_2 - q$$

ici  $P_2 = 0$   
 $\Rightarrow$   
 $K \geq 0$

$$1 - q = \frac{1}{12} (2 - 4q + h'')$$

$$10 = 8q + h'' \Rightarrow q \leq 1$$

On admet la proposition suivante

(Prop) Soit  $X$  une surface (minimale) vérifiant  $K$  nef,  $K^2 \geq 0$   
 $P_2 = 0, q = 1$   
 $\Rightarrow$  ou  $K = 0$  et  $X$  est bi-elliptique  
 ou  $K = 1$



Récapitulons: on a montré les implications

$$K \text{ non nef} \Rightarrow \kappa = -\infty$$

$$K \text{ nef} \Rightarrow \kappa \geq 0$$

et

$$K \text{ nef}, \kappa^2 > 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

On en déduit le

Th *Unas équivalences.*

$$K \text{ non nef} \Leftrightarrow \kappa = -\infty$$

$$K \text{ nef} \Leftrightarrow \kappa \geq 0$$

$$K \text{ nef}, \kappa^2 > 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

$$K \text{ nef}, \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ou } 1$$

Au passage, on peut remarquer que depuis que  $X$  est nef, jamais la configuration  $(P_2, q) = (0, 0)$  n'est apparue. (pour  $\kappa^2 > 0$ , on a admis que  $P_2 \geq 1$ , et dans tous les autres cas soit  $P_2 \geq 1$ , soit  $q \geq 1$ ). Cela veut donc dire que  $(P_2, q) = (0, 0) \Rightarrow \kappa = -\infty \Rightarrow X$  est réglé; mais comme  $q = 0$  elle est forcément rationnelle. Et c'est

Th [Critère de rationalité de Castelnuovo] Une surface (proj, linc) est rationnelle (i.e. biat à  $\mathbb{P}^2$ ) si  $P_2 = q = 0$ .



# Classification quand $\kappa=0$

Th [ $\kappa=0$ ] Une surface minimale de dimension de Kodaira nulle, i.e.  $\kappa=0$ , est

- ① une surface de Enriques si  $p_g = q = 0$
- ② une surface  $K3$  si  $p_g = 1$  et  $q = 0$
- ③ une surface abélienne si  $p_g = 1$  et  $q = 1$
- ④ une surface bi-elliptique si  $p_g = 0$  et  $q = 1$

et cette liste est exhaustive.

Pg  $p_g = q = 1$ , ça m'excite pas!

(Puisque  $\kappa=0$ , on voit que les  $p_m \in \{0, 1\}$ . En particulier on a  $p_g \in \{0, 1\}$ .)

Grâce à Noether, on trouve aussi  $q$ . En rappel que

$$\begin{aligned} 12\chi(\mathcal{O}_X) &= \kappa^2 + 2 + 2p_g + h^{1,1} - 4q \\ &= 4 \underbrace{(1 + p_g - q)}_{\chi(\mathcal{O}_X)} - 2 - 2p_g + h^{1,1} \end{aligned}$$

mais on voit que  $\kappa^2 = 0$

$$\Rightarrow 8\chi(\mathcal{O}_X) = -2 - 2p_g + h^{1,1} \geq -4$$

car  $p_g \leq 1$   
et  $h^{1,1} \geq 0$

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_X) \geq 0.$$

On en déduit que  $q \leq 1 + p_g \leq 2$  donc  $q \in \{0, 1, 2\}$ .

\* Cas  $g = p_g = 0$

On a vu qu'alors  $p_2 = 1$  (cf.  $K_{\text{nef}}, K^2 = 0$ )

Montrons par l'absurde que  $p_3 = 0$  en le supposant égal à 1.

Alors il existe  $D_2 \in |2K|$  et  $D_3 \in |3K|$ . Du coup

$3D_2$  et  $2D_3$  appartiennent à  $|6K|$  de dimension projective égale

donc  $3D_2 = 2D_3$ . Il existe donc  $D$  effectif tel que  $D_2 = 2D$

et  $D_3 = 3D$ . Alors  $D_3 - D_2 = D \in |K|$ , ce qui est contradictoire

avec  $p_g = p_2 = 0$ . Bref  $p_3 = 0$

Riemann-Roch appliqué à  $3K$  donne

$$h^0(3K) + h^0(-2K) \geq 1 \Rightarrow h^0(-2K) \geq 1$$

Comme  $2K$  est nef, il vient  $2K \sim 0$ .

Mais  $p_g = g = 0$  et  $2K \sim 0$  est la caractérisation des surfaces d'Enriques.

\* Cas  $p_g = 1, g = 0$ . RR appliqué à  $2K$  donne

$$h^0(2K) + h^0(-K) \geq 2$$

$$\Rightarrow h^0(-K) \geq 1 \underset{K_{\text{nef}}}{\Rightarrow} K \sim 0$$

Mais  $K \sim 0$  et  $g = 0$  est la caractérisation des surfaces  $K3$ .

# Classification quand $\kappa = 1$

{ Th [ $\kappa=2$ ] Une surface minimale de dimension de Kodaira 1,  $\kappa=2$ , est une surface elliptique.

(Ebauche. Le fait que les  $p_m$  ne soit pas bornés nous assure que les  $\varphi_{m\kappa}$  ne sont pas toujours constants. Pour  $m$  assez grand

écrivons  $M\kappa \sim D_f + D \xleftarrow{\text{fixe}} D, D_f \text{ effectifs}$

Alors  $D^2 = \frac{1}{m\kappa} \kappa^2 = 0$

$$0 = (m\kappa, \kappa) = (D_f + D, \kappa) = \underbrace{(D_f, \kappa)}_{\geq 0} + \underbrace{(D, \kappa)}_{\geq 0} \quad \text{car } \kappa \text{ nef}$$

Donc  $(D_f, \kappa) = (D, \kappa) = 0$ .

Toujours est-il que le morphisme  $\varphi_{m\kappa}$  contracte tous les éléments de  $D$ . Du coup  $\text{Im}(\varphi_{m\kappa})$  est une courbe.

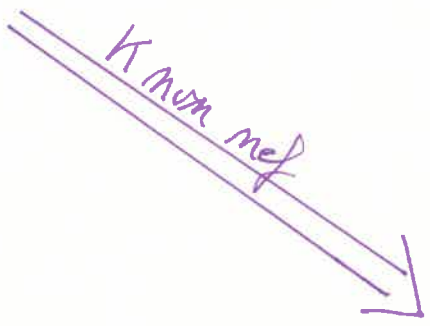
En fin par l'adjonction, pour  $C$  irréductible  $\in |D|$

$$\begin{aligned} 2g(C) - 2 &= C(C + \kappa) \\ &= C^2 + C \cdot \kappa \\ &= D^2 + D \cdot \kappa \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(C) = 1$  !



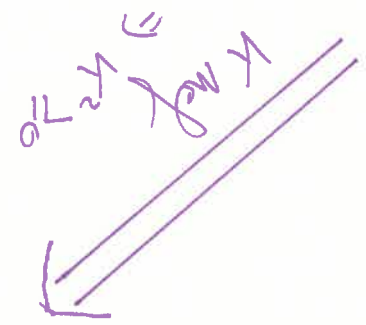
$K$  diverse



①  $K = -\infty \Rightarrow X$  géométrie sur  $\mathbb{P}^2 \Rightarrow (K, P, q) = \begin{cases} (-\infty, 0, 0) \\ (-\infty, 0, q) \end{cases}$

bivect  $\bar{z} \in \mathbb{P}^2$   
 bivect  $\bar{a} \in \mathbb{C}X \setminus \mathbb{P}^1$   
 plane  $q$ .

Caractérisation



$K \text{ mesf} \Rightarrow K^2 = 0$

$K \geq 0$  plus rationnellement  $\begin{cases} K=2 \Leftrightarrow K^2 > 0 \\ K=0 \text{ or } 1 \Leftrightarrow K^2 = 0 \end{cases}$

if point distingué  
 selon plusieurs cas

$q=0$  or  $P_1 \neq 1$  facile

cas difficile  $P_1=0$  or  $q=1$



$K \text{ mesf} \Leftrightarrow K = -\infty$   
 $K \text{ mesf} \Leftrightarrow K \geq 0$





$K$	$(P_g, q)$	Produit de courbes	Exemples	Commentaires
$-\infty$	$(0, 0)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^2$ surfaces de Hirzebruch de diamètre $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $K = -3H$	Elles sont les surfaces réglées à base $\mathbb{P}^1: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ Morphisme, à fibres $\mathbb{P}^1$ surfaces rationnelles
$0$	$(0, 1 > 0)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ $g(K) > 0$	Surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ Rationnel normal Scall $\mathbb{P}^2_{a,b}$	Elles sont toutes bi-rationnelles à $\mathbb{P}^3$ i.e. rationnelles
$1$	$(0, 1 > 0)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ $g(K) > 0$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ $\uparrow$ pour $g > 0$ $\begin{matrix} 1 & q & 0 \\ 0 & 2 & q \\ 0 & q & 1 \end{matrix}$	Elles sont les surfaces réglées à base $\mathbb{C}$ de genre $> 0$ . (i.e. non rationnelles)
$1$	$(0, 1 > 0)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ $g(K) > 0$	$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un fibre vectoriel de rang 2 sur une courbe de genre $g \geq 1$ [Spitzi, Th 4.4 p.8]	Elles sont les surfaces réglées à base $\mathbb{C}$ de genre $> 0$ . (i.e. non rationnelles)

$K$  non nef  
 $\rightarrow$  sur toute la page

- p'infim:  
~~elles~~  $\Rightarrow$  tous les plans tangents sont nuls



$K$	$(p, q)$	Produit de courbes	Exemples	Commentaires
0	$(1, 0)$		Surfaces $K=3$ $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $(\Leftrightarrow) q=0$ et $K=0$ + minimal	Restrictions aux surfaces minimales On a, à partir de $K \geq 0$ $X \equiv_{\text{bi-nat}} X' \Leftrightarrow X \simeq X'$ <small>1957m.</small> [13, Th 5.15]
	$(1, 2)$	$E_1 \times E_2$ $q(E_2) = q(E_1) = 1$	Surfaces abéliennes Jac(C) $g(C) = 2$ $\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$	
	$(0, 2)$		Surfaces bi-elliptiques / hyperelliptiques $\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}$	
$g \neq 0 \Leftrightarrow p_m \in \text{foi}$ , $\forall m$ et $\exists p_m \neq 0$	$(0, 0)$		Surfaces de Enriques $(\Leftrightarrow) q=0, K \neq 0$ mais $2K=0$ $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $p_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$K_{\text{neg}}, K^2 = 0$ → voir toute la page



$H$	$(P_g, q)$	Produit de Coxeter	Exemples	Commentaires
1		$C \times E$ $g(C) \geq 2$ $g(E) = 1$	Surfaces elliptiques $X \rightarrow C$ $\bar{\alpha}$ fibres elliptiques	
2		$C \times D$ $g(C) \geq 2$ $g(D) \geq 2$	Surfaces de type général	$K_{\text{nef}}, K^2 = 0$  $K_{\text{nef}}, K^2 > 0$



## Deviator's tricks.

nef 2  
 Lemme Soit  $D$  un diviseur nef sur une surface  $X$ , alors  $D^2 \geq 0$

(cf. [R, Cor 2.3 p. 114] ou [CP, Uth 8 p. 6]).

On considère  $H$  ample et pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $p(t) = (D + tH)^2$ .

Alors  $p(t) = H^2 t^2 + 2t(D, H) + D^2$  est un polynôme croissant sur  $\mathbb{R}_+$

Car  $p'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{(D, H)}{H^2} \leq 0$  car  $(D, H) \geq 0$  ( $D$  nef et  $H$  ample) et  $H^2 > 0$  (ample).

Bref  $p(t)$  finit par devenir  $> 0$  pour  $t \gg 0$ . Montrons que c'est le cas dès que  $t \geq 0$ . Pour cela, vérifions que  $p(t) > 0 \Rightarrow p(t/2) > 0$ .

Puisque  $p(t) > 0$ , on a  $(D + tH)^2 > 0$  et  $(D + tH) \cdot H > 0$  pour  $t \gg 0$ .

Comme  $D$  est nef, il en résulte que  $D \cdot (D + tH) \geq 0$ .

Du coup

$$(D + \frac{t}{2}H)^2 = \underbrace{(D, D + tH)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{t^2}{4}H^2}_{> 0} > 0, \text{ i.e. } p(t/2) > 0.$$

On en déduit bien que  $p(t) > 0 \forall t > 0$  si bien que  $p(0) = D^2 \geq 0$ .





Lemme Soit  $D$  un diviseur nef. Alors  $D \neq 0 \Rightarrow h^0(-D) = 0$  nef 2  
ou encore  $h^0(-D) > 0 \Rightarrow D \sim 0$ . ! ✓

[P, Lemma 5.5 p. 9].

( Supposons que  $h^0(-D) \geq 1$ , alors il existe  $E$  diviseur effectif linéairement équivalent à  $-D$ . Si ce diviseur est nul, c'est que  $-D$  est linéairement trivial donc  $D \sim 0$ . Si  $E$  n'est pas nul, alors on peut trouver  $C$  une courbe qui intersecte  $E$  transversalement, si bien que  $(C, E) > 0$ . Mais alors

$$(D, C) = -(-D, C) = -(E, C) < 0$$

C'est contraire à l'hypothèse selon laquelle  $D$  est nef donc  $E = 0$  et  $D \sim 0$ . )

