Intro surfaces

X surface = non-singulier, projectif, $k = \bar{k}$

Ex : $\mathbb{P}^2$

hypersurfaces

surfaces abéliennes

surfaces réglées $\pi : X \twoheadrightarrow C$, C non singulière, $\pi^{-1}(y) = X_y \simeq \mathbb{P}^1 \quad \forall y$. | $\exists\, \sigma$ tel que $\pi \circ \sigma = 1$.

elliptiques. $\pi^{-1}(y)$ courbes de genre 1.

fibrées : $\supset C_1 \times C_2$.

Def: diviseur (de Weil) $D = \sum_{\text{finie}} n_i D_i$, D_i sont des courbes (possiblement singulières, réductibles et non réduites).

diviseur principal $= \mathrm{div}(f)$ $f \in k(X)$

$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Princ}(X)$

Ex: $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) = \langle h \rangle \simeq \mathbb{Z}$, h droite.

$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Surface abélienne $\quad \mathrm{Pic}(X) \supset \hat{X} = \mathrm{Pic}^0(X)$

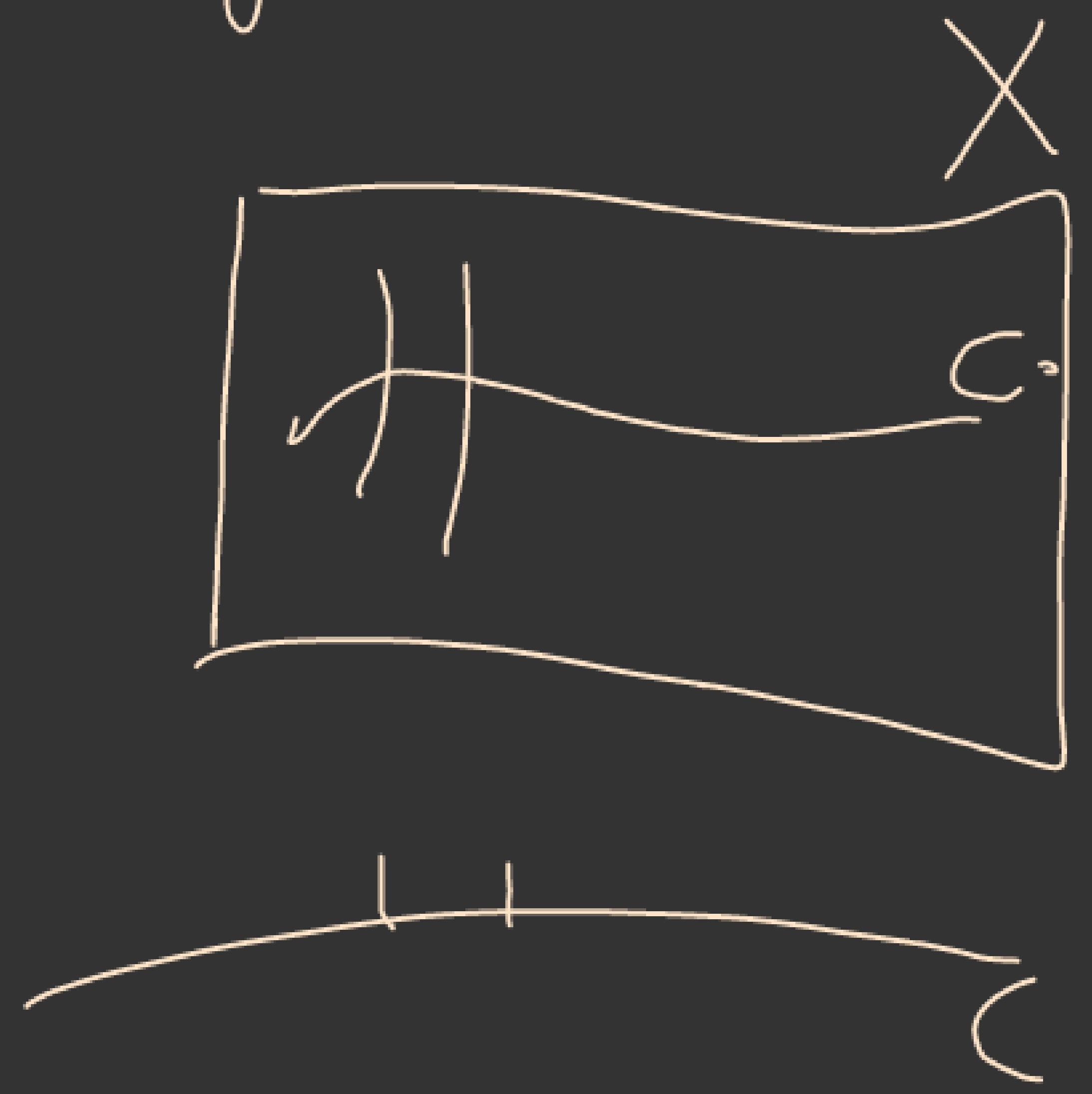
$$\mathrm{Pic}^0(X) \sim X.$$

$$\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X) = NS(X)$$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $\leq 4\dim(X)^2$

$$X \xrightarrow{\phi_{\mathcal{L}}} \hat{X}$$
$$x \longmapsto \mathcal{L}_x \otimes \mathcal{L}^{-1}.$$

p.p $\phi_{\mathcal{L}}$ est un iso.

Surfaces réglées : $\quad \mathrm{Pic}(X) \simeq \underset{\langle C_0 \rangle}{\underset{\parallel}{\mathbb{Z}}} \oplus \pi^* \mathrm{Pic}(C)$



Surface fibrée $\quad \mathrm{Pic}(C) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X)$

E c.e $\quad E \times E \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} E$

$$0 \to p_1^* \mathrm{Pic}(E) \oplus p_2^* \mathrm{Pic}(E) \to \mathrm{Pic}(E^2) \to \mathrm{End}(E) \to 0$$

$(\underline{\mathrm{IV}}\ 4.10)$

<u>Def</u> : multiplicité d'intersection $P \in C \cap D$

$$(C \cdot D)_P = \dim_k \mathcal{O}_{P,X} / (f,g)$$

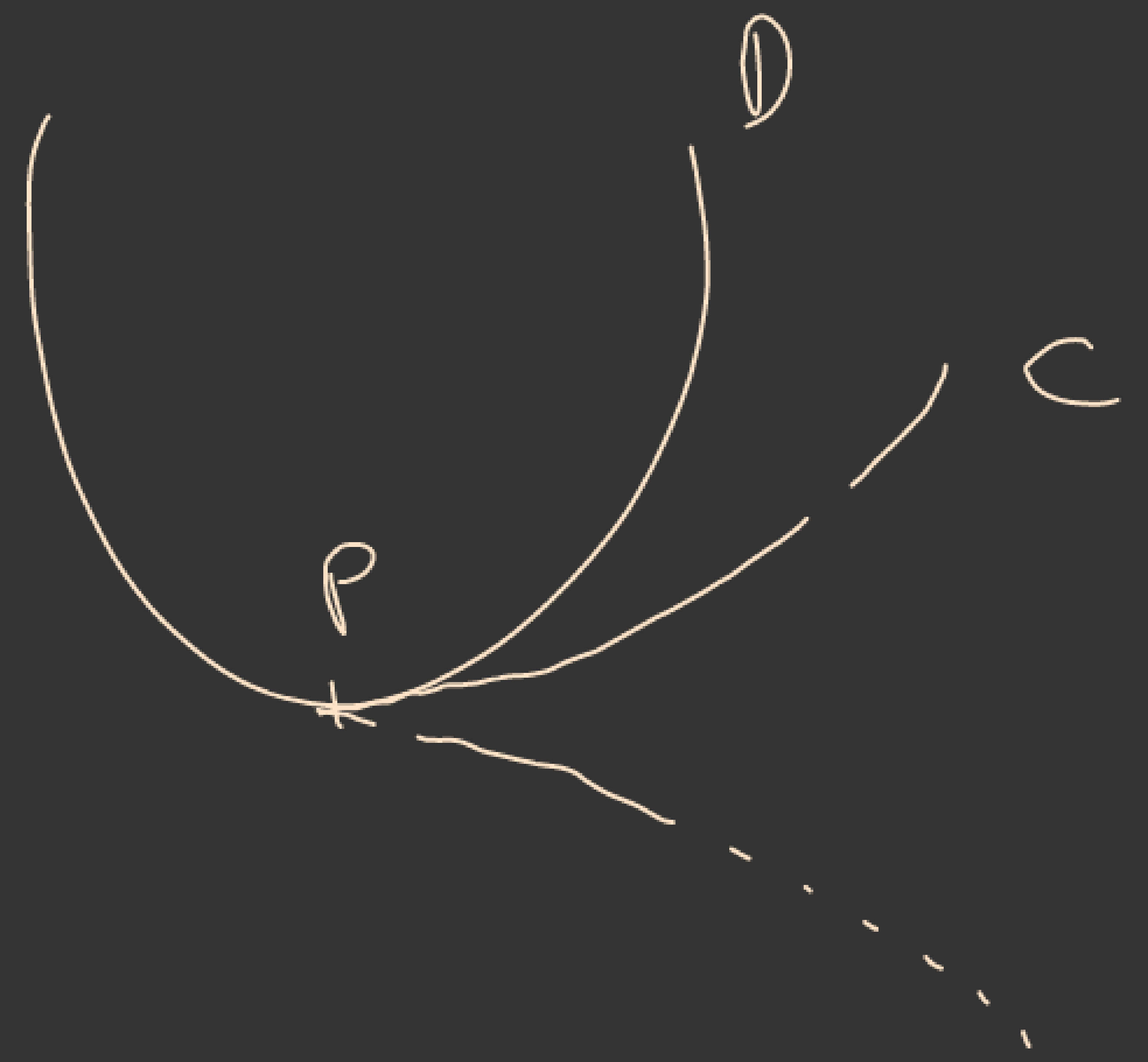
f, g équations locales en P de C et D.

Exc (Silverman II, 7.5)

$$C : y^2 z = x^3$$

$$D : yz = x^2$$

$$X = \mathbb{P}^2, \quad P = [0:0:1]$$



On pose $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P} = k[x,y]_{(0,0)} = \left\{ \frac{f}{g} \in k(x,y), \ g(0,0) \neq 0 \right\}.$$

$$\frac{k[x,y]_{(0,0)}}{(y^2 - x^3, y - x^2)} \simeq \frac{k[x]_0}{(x^4 - x^3)} = \frac{k[x]_0}{x^3} \text{ de dim } 3$$

Th : $\exists !$ couplage $\quad \mathrm{Div}\, X \times \mathrm{Div}\, X \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$C\,,\, D \longrightarrow C.D$$

- Si C et D sont 2 courbes qui se rencontrent transversalement ($\underline{\text{ie}}$ $\quad (C,D)_p = 1 \quad \forall p \in C \cap D$)

  $C.D = \#(C \cap D)$
- symétrique
- additif
- Si $C_1 \sim C_2$ alors $C_1.D = C_2.D \quad \forall D$.

$(C.D) = \deg\left(\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C\right)$ et $\quad 0 \to \mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C \cap D} \to 0$

Cor : Si C et D sont des courbes sans composante commune

alors $(C.D) = \sum_{p \in C \cap D} (C.D)_p$.

Ex : $X = \mathbb{P}^2$, C et D des courbes de deg n et m.

$C \sim nh \qquad C.D = nm\,(h.h) = nm$
$D \sim mh$

Def : $\Omega_{X/k}$ faisceau des différentielles sur X

$\omega_X = \Lambda^2 \Omega_{X/k}$. Le genre géométrique de X, $p_g = \dim_k H^0(X, \omega_X)$
est un invariant birationnel (II, Th 8.19)

Ex : X hypersurface de $\mathbb{P}^3$ de deg d, $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(d-4)$ (II 8.20.3)

(Shafarevich) 3.6.4.

$X = C_1 \times C_2$ $\quad \omega_X = p_1^* \omega_{C_1} \otimes p_2^* \omega_{C_2}$. (ex. II 8.3).

$X =$ surface abélienne $\quad \omega_X = \mathcal{O}_X$

Prop : (Formule d'adjonction) Si C est non-singulière sur X de genre g et K est le diviseur canonique sur X

alors $2g-2 = C.(C+K)$.

Exc : C une courbe de deg d dans $\mathbb{P}^2$

$$2g-2 = C\cdot(C+K) = d^2 + (dh)\cdot(-3h)$$
$$= d^2 - 3d.$$

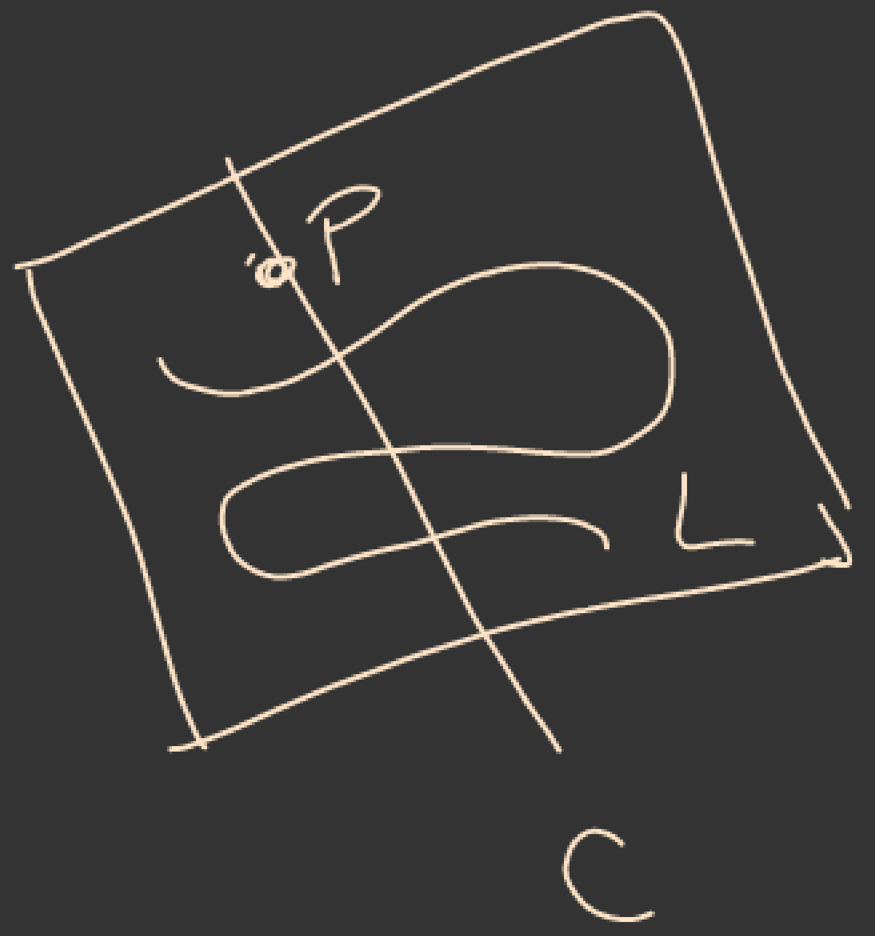
Exc : X hypersurface de $\mathbb{P}^3$ de deg d, contenant une droite C.

Alors $C^2 = 2-d$.

$$K_X \sim (d-4)h$$

$$2g-2 = -2 = C^2 + C\cdot K_X = C^2 + C\cdot((d-4)h) = C^2 + d-4$$

$X \subseteq \mathbb{P}^3$



$\Pi \neq T_p X$

$$X \cap \Pi = L + C$$

$$\deg L = d - 1$$

$$\underbrace{C \cdot h}_{1} = C \cdot (C+L) = C^2 + \underbrace{C \cdot L}_{d-1}$$

$$X \cap \Pi \simeq h$$

$h^2 = d$ car $X \cap \Pi_1 \cap \Pi_2$

$= X \cap$ Droite

$= d$ pts

$$h = L + C$$

$$h^2 = C^2 + 2LC + L^2$$

$L^2 = 0$ car

$L \cap L' = \emptyset$

car surface lisse

$$d = C^2 + 2(d-1)$$

· Si C et C' sont 2 courbes de g et g' alors

$$K^2_{C\times C'} = 8(g-1)(g'-1)$$

· Si C est de genre g, $\Delta \subset C\times C$ alors $\Delta^2 = 2-2g$.

· $2p_a(D) - 2 = D(D+K)$.

<u>Th</u> (RR) D diviseur sur X

$$l(D) - s(D) + l(K-D) = \frac{1}{2} D.(D-K) + 1 + p_a.$$

$l(D) = \dim H^0(X, \mathcal{L}(D))$

$s(D) = \dim H^1(X, \mathcal{L}(D))$ surabondance.

$p_a = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = P_X(0) - 1$

P_X poly de Hilbert.

cor I.7.2 $\quad X$ hypersurface de deg d $\quad p_a = \binom{d-1}{3}$

$X = C_1 \times C_2 \qquad p_a = p_a(C_1) \times p_a(C_2) - p_a(C_1) - p_a(C_2)$

$p_a(C) = g(C)$

Déf : D sur X est numériquement équivalent à 0, $D \equiv 0$, si $D \cdot E = 0$ $\forall E$ diviseur.

Th (indice de Hodge) H un diviseur ample sur X et $D \not\equiv 0$ avec $D \cdot H = 0$ alors $D^2 < 0$.

Rem $\mathrm{Pic}^{num}(X) \subset \mathrm{Pic}(X)$

$\mathrm{Num}(X) = \mathrm{Pic}(X) / \mathrm{Pic}^{n}(X)$ est muni d'un couplage qui est non dégénéré.

$\mathrm{Num}(X)$ est de type fini.

$\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim finie.

Le couplage peut être diagonalisé avec des v.p. $= \pm 1$.

$$\text{Hodge} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad H.$$

<u>Ex</u>: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = X$

$H = (1,1)$ est ample.

et $D = (1,-1)$

on a $H^2 = 2$, $H \cdot D = 0$ et $D^2 = -2$.

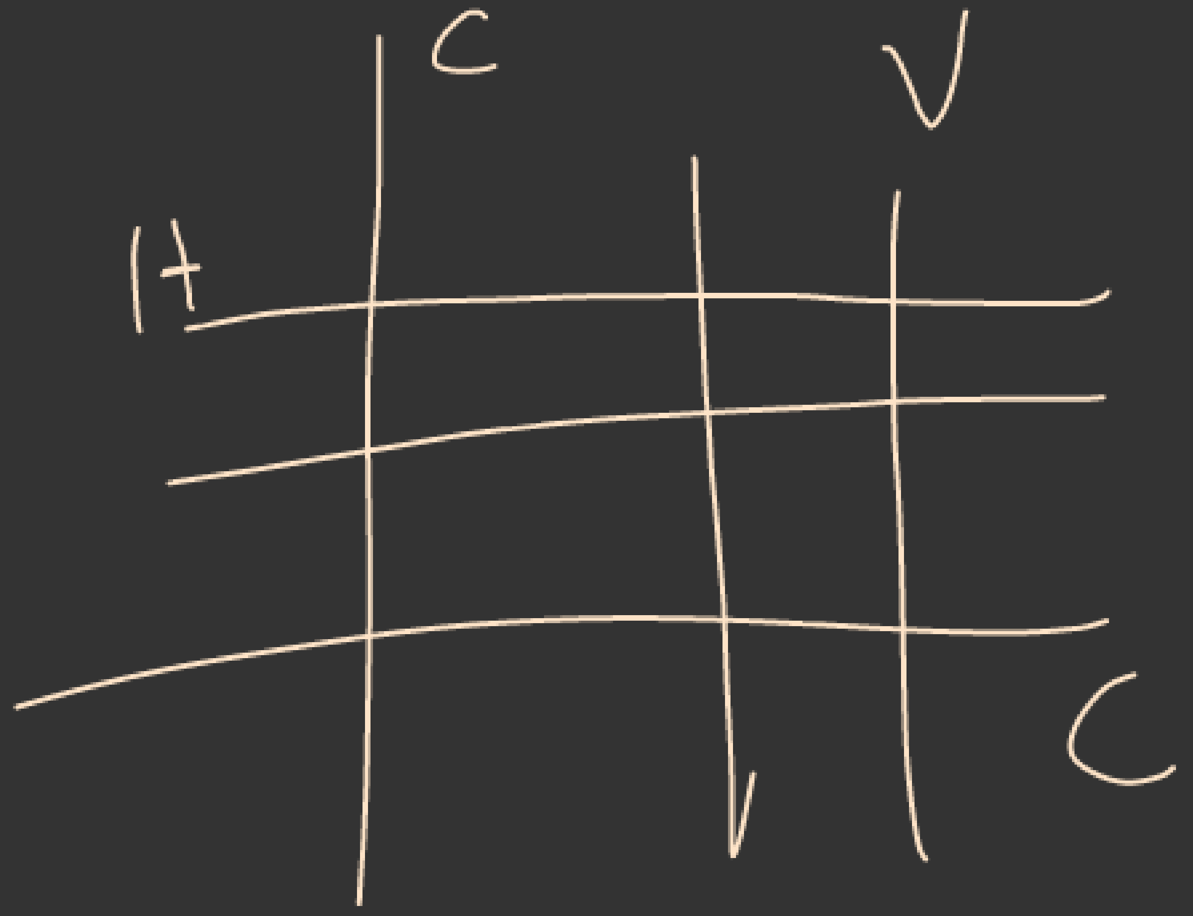
$D \equiv 0 \Leftrightarrow D \sim 0$ donc $\mathrm{Num}\, X \simeq \mathrm{Pic}(X)$

$\mathrm{Num}\, X \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$.

Critère d'amplitude

D est ample ssi $D^2 > 0$ et $D.C > 0$ $\forall C$ courbe irréductible.

$X = C \times C$ et le diviseur $H = C \times \{pt\}$
$V = \{*\} \times C$



$H + V$ est ample. En effet $(H+V)^2 = 2\,H.V = 2$.

$(H+V)\,H = 1$

$(H+V)\,V = 1$.

$(H+V).D > 0$ en intersectant la courbe avec une fibre.

Restreint le$^{\text{l'opposé}}$ couplage à $\mathrm{Vect}(H,V)^{\perp}$ dans $NS(X)\otimes\mathbb{R}$ est définie positive.

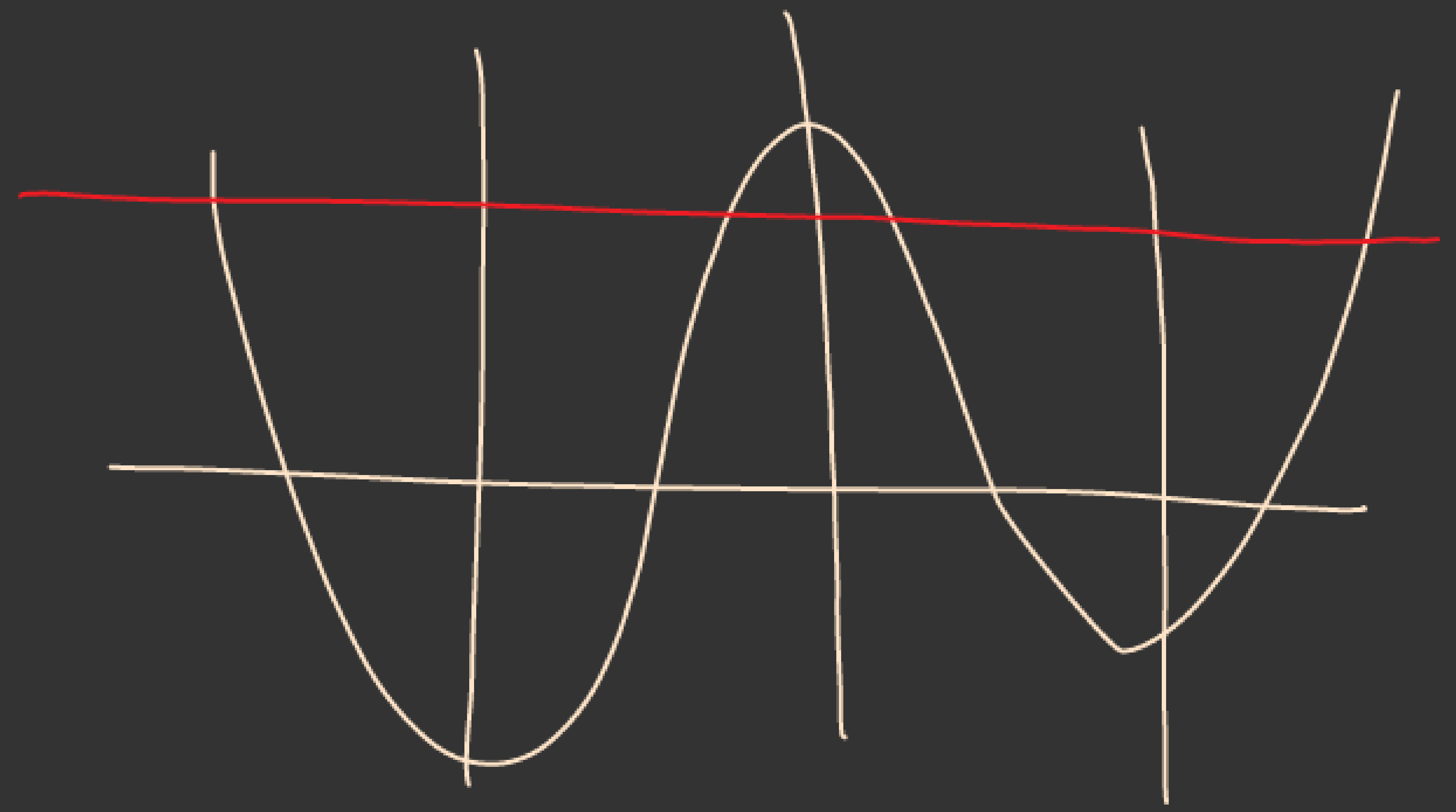
<u>Lem</u>: $F : C \to C$ Frobenius $C/\mathbb{F}_q$, $F^0 = \mathrm{Id}$.

Γ^k graphe sur X de F^k.

$$\begin{aligned} p : NS(X)\otimes\mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{Vect}(H,V)^{\perp} \\ \Gamma &\longmapsto \Gamma - (\Gamma\cdot V)H - (\Gamma\cdot H)V \end{aligned}$$

$$\langle \rho(r^k) \cdot \rho(r^k) \rangle = 2g\,p^k$$

$$\langle \rho(r^k) \cdot \rho(r^{k+i}) \rangle = q^k \left((q^i + 1) - \#C(\mathbb{F}_{q^i}) \right)$$



$\boxed{D}$ F^k est de deg q^k

$V \cdot r^k = 1$

$H \cdot r^k = q^k$

$\Pi : F^k \times \mathrm{Id} : C \times C \longrightarrow C \times C$

$$\pi^*(\Delta) = \Gamma^k \qquad (x,y) \in \pi^*(\Delta) \Leftrightarrow \pi(x,y) = (F^k(x), y) = (\alpha, \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = F^k(x)$$

$$\pi_*(\Gamma^{k+i}) = q^k \Gamma^i \qquad \pi_*((x, F^{k+i}(x))) = (F^k(x), F^{k+i}(x))$$

Formule de projection (Hartshorne p. 426)

$$\Gamma^k \cdot \Gamma^{k+i} = \pi^*(\Delta) \cdot \Gamma^{k+i} = \Delta \cdot \pi_*(\Gamma^{k+i})$$

$$= q^k \Delta \cdot \Gamma^i$$

$i = 0 \quad \Delta \cdot \Gamma^0 = \Delta^2 = 2 - 2g.$

$i > 0 \quad \Delta \cdot \Gamma^i = \#\{x \in C \mid q \ F^i(x) = x\} = \# C(\mathbb{F}_{q^i}).$

Non négativité $\quad 0 \leq \mathrm{Gram}(\rho(\Gamma^0), \rho(\Gamma^1)) = \begin{vmatrix} 2g & q+1-\# C(\mathbb{F}_q) \\ q+1-\# C(\mathbb{F}_q) & 2gq \end{vmatrix}$

$= (2g\sqrt{q})^2 - (q+1-\# C(\mathbb{F}_q))^2$ (Weil)