Classification des surfaces.

(cf Chris Peters "Classification of Complex algebraic surfaces" Mori View Point).

I Classification à quoi près?

Surfaces : Variété de dim 2, lisse, projective

X, Y deux surfaces. On distingue deux type d'applications :

$X \longrightarrow Y$

$X \dashrightarrow Y$

* les morphismes $X \to Y$ ou application régulière.
* les applications rationnelles (régulière sur un ouvert).

On a deux notion de bi-quelque chose.

* isomorphismes ou application bi-régulière

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend right, "\varphi"'] & Y \arrow[l, bend right, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

* applications bi-rationnelle

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, bend right, "\varphi"'] & Y \arrow[l, dashed, bend right, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

* morphismes bi-rationnel

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\varphi"] & Y \arrow[l, dashed, bend left, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Prototype de morphisme bi-rationnel c'est l'éclatement.

$$\widetilde{\mathbb{P}}^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \qquad \left\{ (x:y:z),(u:v) \;\middle|\; \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = 0 \right\} \qquad E$$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{P}}^2 & \left\{ (x:y:z),(u:v) \right\} & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{P}^2 & (x:y:z) & (0:0:1) \end{array}$$

$P = (0:0:1)$

$$X \longrightarrow Y$$

On dispose de deux théorèmes de structure.

Th [levée d'indétermination] $\varphi : X \dashrightarrow Y$ rationnelle

birationnelle

Alors on a un triangle suivant :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\text{suite d'éclatements}"'] \arrow[dr, "\text{morphisme}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X \arrow[rr, dashed] & & Y \end{tikzcd}$$

Th [factorisation des morphismes]
Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme birationnel alors il est le composé d'un nombre fini d'éclatements

Déf Une surface X est dite minimale si tout morphisme bi-rationnel $X \to Y$ est un isomorphisme.

Rq une espèce d'objet terminal

Prop Toute surface domine une surface minimale : si X est une surface, il existe X_0 minimale et $X \longrightarrow X_0$ une suite d'éclatements.

Rq une surface est bi-rationnelle à "son" modèle minimal

Les surfaces minimales sont de bons candidats pour être un système de représentants des classes bi-rationnelles

On cherche à classifier les surfaces à équivalence bi-rationnelle près. Pour ce faire, on peut se limiter à considérer des surfaces minimales.

Th Une surface est minimale ssi elle ne contient pas de (-1)-courbe, c-à-d de courbe $E \simeq \mathbb{P}^1$ vérifiant $E^2 = -1$

II Invariants discrets.

Revenons aux courbes. On connaît un invariant discret : c'est le genre $g = \dim H^0(\Omega^1) \longrightarrow$ 1-formes différentielles régulières.

Surfaces : on commence pareil $H^j(\Omega^i)$ $\quad 0 \leq i, j \leq 2$

$$h^{ij} = \dim H^j(\Omega^i)$$

On les représente sous forme de diamant

Tous les cerclés sont des invariants bi-rationnels pas $h^{1,1}$!

irrégularité q

p_g

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & & h^{00} = 1 & & & b_0 \\
 & h^{10} & & h^{01} & & b_1 \\
h^{20} & & h^{11} & & h^{02} & b_2 \\
 & h^{21} & & h^{12} & & b_3 \\
 & & h^{22} = 1 & & & b_4
\end{array}
$$

Symétries

Dualité Serre

$$h^{i,j} = h^{2-i,2-j}$$

sym / centre

$$h^{i,j} = h^{j,i}$$

Théorie de Hodge-Serre

$$h^{i0} = \dim H^0(\Omega^i)$$

$$= \begin{cases} \text{fcts régulières} & i=0 \\ \text{1-formes} & i=1 \\ \text{2-formes} & i=2 \end{cases}$$

$$H^i(\Omega^2) = H^i(K)$$ K diviseur canonique

$$e(X) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4$$

Dernier invariant.

K diviseur canonique

$$P_g = P_1 = h^0(X, K)$$

pluri-genre

suite $(P_m)_{m \geq 1}$

$$P_m = h^0(X, mK)$$

Déf La dimension de Kodaira, notée κ est le plus petit entier tel que

$$P_m \underset{m \to +\infty}{=} O(m^\kappa)$$

$\kappa = -\infty \iff P_m = 0 \ \forall m$

$\kappa = 0 \iff P_m \in \{0,1\} \ \forall m$ et $\exists\, m$ t.q. $P_m \neq 0$

Objectif : classifier les surfaces selon les invariants (κ, p_g, q).

On commence par focaliser sur κ. κ

K

Idée de Mori : dichotomie ne se fait pas sur les valeurs de κ mais plutôt sur la "nefatitude de K le diviseur canonique".

$$K = K_X$$

Déf Un diviseur D sur X est dit nef ssi $D.C \geq 0$ pour toute courbe

Nakai Moishezon

Rq H un diviseur est ample ssi $H^2 > 0$ et $H.C > 0$ $\forall C$ courbe

Ample $\Rightarrow$ Nef.

On distingue deux mondes

K_X nef

K_X non nef

III Supposons K_X non nef

Prop Soit X une surface. Si K_X n'est pas nef alors
soit X n'est pas minimale
soit $\kappa = -\infty$.

(Dire que K_X n'est pas nef, c'est dire qu'il existe C une courbe telle que $K_X \cdot C < 0$

Soit $C^2 < 0$ alors adjonction $\Rightarrow 2g-2 = C\cdot(K+C)$
$= \underbrace{C\cdot K}_{<0} + \underbrace{C^2}_{<0}$

$\Rightarrow C$ est une (-1)-courbe $\Rightarrow X$ pas minimale. $\Rightarrow g<1 \Rightarrow g=0$

Soit $C^2 \geq 0$. On veut montrer que $\kappa = -\infty$, c-à-d que tous les plurigenres sont nuls. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $m \geq 1$ tel que $P_m = h^0(mK) \geq 1$

Cela veut dire que $mK \sim E$ effectif $\quad |mK| \neq \emptyset$

Puisque $E \cdot C < 0 \Rightarrow E = \alpha C + \sum \alpha_i C_i \quad \alpha > 0, \; \alpha_i \geq 0$

$$E \cdot C = \alpha \underbrace{C^2}_{\geq 0} + \sum \alpha_i \underbrace{C \cdot C_i}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{Contradiction}$$

$\Rightarrow P_m = 0 \; \forall m$ et $\kappa = -\infty$

Cônes dans $\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}}$

Indice de Hodge $\Rightarrow$ signature de l'intersection sur $\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ c'est $(1, -1^{\text{rang}-1})$. Si H est ample $H^2 > 0$

$$\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}} = \underbrace{\mathbb{R}H}_{>0} \oplus \underbrace{\mathbb{R}H^{\perp}}_{<0}$$

Tout ample partage $\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ en deux demi-espaces :

$$\mathbb{R}H^{+} = \{D \,/\, D\cdot H > 0\}$$

$$\mathbb{R}H^{-} = \{D \,/\, D\cdot H < 0\}$$

On introduit plusieurs cônes convexes :

$$Na(X) = \left\{ \sum \alpha_H H \ , \ H \text{ amples} \quad \alpha_H > 0 \right\}$$

$$Ne(X) = \left\{ \sum \alpha_C C \ , \ \begin{matrix} C \text{ courbes} \\ \alpha_C \geq 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{cônes des courbes.}$$

$$\overline{Ne}(X)$$

$$Nef(X) = \left\{ \sum \alpha_D D \ , \ \begin{matrix} D \text{ nef} \\ \alpha_D \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

Critère numérique d'amplitude (Kleiman)

$$H \text{ est ample} \iff H.D > 0 \quad \forall\, D \in \overline{Ne}(X) \setminus \{0\}.$$

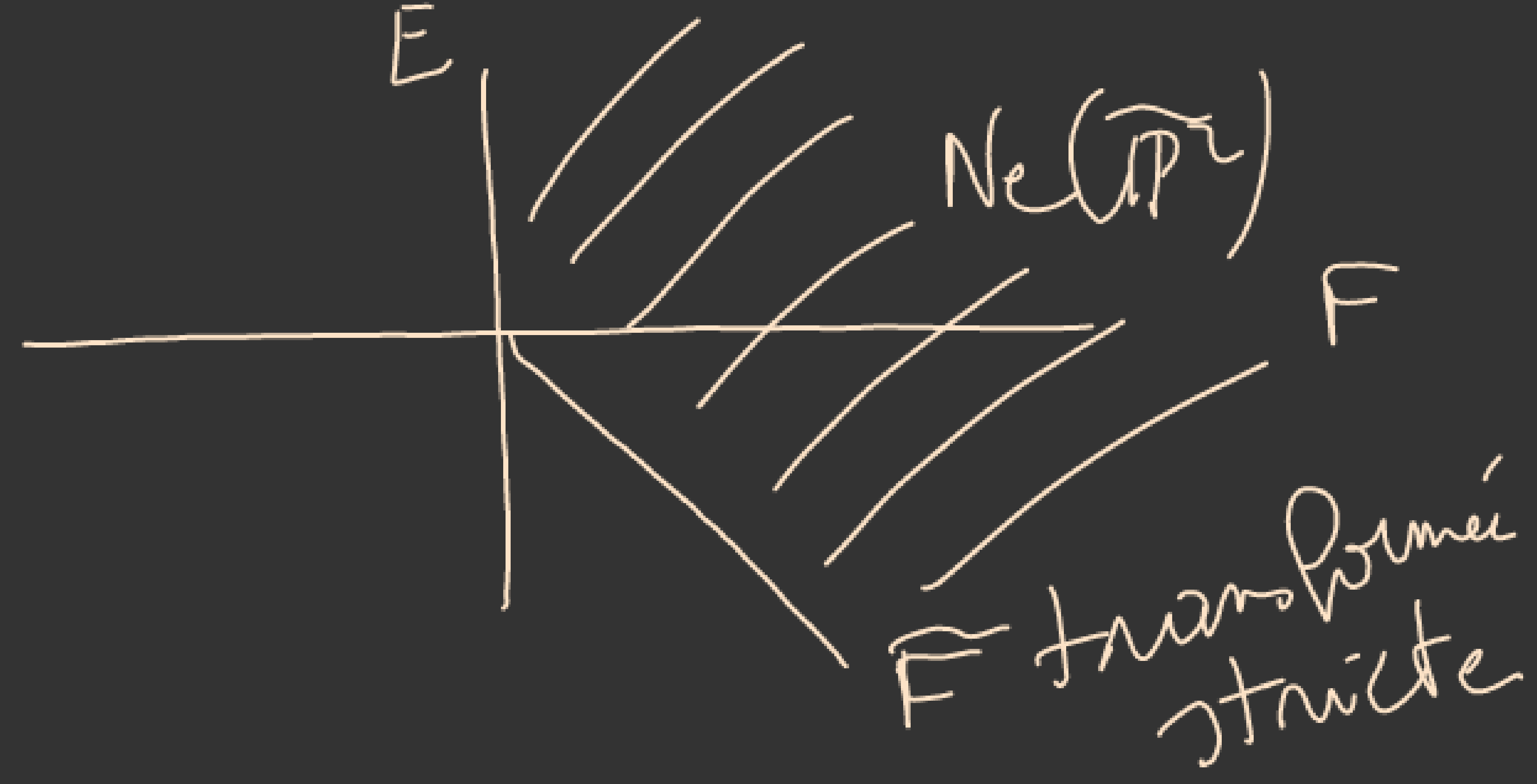
<u>Rq</u> La limite de courbe remplace l'auto-intersection

$$\implies \overline{Na(X)} = Nef(X) \subset \overline{Ne}(X)$$

Ex $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ éclaté de $\mathbb{P}^2$

E exceptionnel

$F = \pi^* D \qquad D \in \mathrm{Div}\, \mathbb{P}^2$



On suppose K_X non nef $\Rightarrow \exists\, C$ t.q.

$C \subset \overline{\mathbb{R}K_X}^-$

On peut regarder les

$$H + r K_X \qquad r \geq 0$$

$$r_1 = \sup \{ H + r K_X \text{ est nef} \}.$$

Th [de rationalité] $\quad r_1 \in \mathbb{Q}$

Application à la classification

$r_1 = \dfrac{a}{b}$ on pose $L = bH + aK_X$

L est nef non ample

et $L - \varepsilon K_X$ ample $\forall \varepsilon > 0$

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell(L)-1}$$

$0 = D \cdot L = D \cdot \varphi^* H$

$= \varphi_* D \cdot H$

Exo φ_L contracte D

$\Updownarrow$

$L \cdot D = 0$

Exo L sans comp fixe et sans point base

$$\varphi_L \; X \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell(L)-1}$$

$\dim \varphi_L(X) \leq 1 \iff L^2 = 0$

$\mathbb{P}^1 \times C$

$\kappa = -\infty \iff K_X$ non nef

surface réglée

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ C \end{array}$$ fibre $\mathbb{P}^1$

$+\ \mathbb{P}^2$

$\kappa \geq 0 \iff K_X$ nef

$\kappa = 2 \iff K_X$ nef et $K_X^2 > 0$ $\longrightarrow C_1 \times C_2$, $g(C_i) \geq 2$

fibrée sur $\mathbb{P}^1$

$\kappa = 0, 1 \iff K_X$ nef et $K_X^2 = 0$

$\kappa = 0$: surfaces ab, K3, Enriques

$\kappa = 1$: surfaces elliptiques.

modèle minimal unique

Une infinité de surfaces minimale

$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = \mathbb{F}_n$ de Hirzebruch

$n \geq 0$ sauf $n = 1$

$\cancel{\mathbb{F}_1}$ $\mathbb{P}^2$